סיבוכיות - תרגול 10

כל העולם הוא חישוב אחד גדול

17.5.11

בעיית הסוכן הנוסע

התחלנו לדבר כבר בתרגול הקודם. נזכיר:
קלט: גרף מלא $G=(V,E)$ ופונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}^+$ המקיימת את א"ש המשולש, כלומר:

$$\forall x,y,z\in V\qquad w((x,z))\leq w((x,y))+w((y,z))$$

המטרה היא למצוא מעגל המילטון (מעגל העובר דרך כל צומת בדיוק פעם אחת) שמשקלו הכולל מינימלי. ראינו שזאת בעיה NP קשה. אז השתמשנו באלגוריתם קירוב:
עבור $c\geq 1$ אלגוריתם c–קירוב מוצא מעגל המילטון שמשקלו לכל היותר c כפול המשקל הקטן ביותר האפשרי.

תזכורת. אלגוריתם 2–קירוב.

1. נמצא עץ פורש מינימלי T ונכפיל את קשתותיו.
2. נמצא מעגל אוילר EC בגרף שהתקבל (אפשרי כי הדרגות זוגיות).
3. נקצר את EC למעגל המילטון A (ע"י פסיחה על קשתות שמובילות לצמתים שכבר ביקרנו בהם).

וקיבלנו:

$$w(A)\leq w(EC)=2w(T)\leq 2w(OPT)$$

היינו רוצים לנסות לשפר את האלגוריתם.
אלגוריתם משופר:

1. נמצא עץ פורש מינימלי T ונגדיר: $U=\{v\in V|\deg_T(v)\in\mathbb{N}_{odd}\}$.
2. נמצא זיווג מושלם M ממשקל מינימלי בתת הגרף המושרה על U ונסיף את קשתותיו לקשתות העץ T.
3. נמצא מעגל אוילר EC בגרף המתקבל (מ-M ומ-T) ונקצרו למעגל המילטון A.

הערות.

- זיווג מושלם הוא אוסף קשתות שכל צומת שייך לאחת מהן בדיוק.

- קיים אלגוריתם פולינומיאלי שבהינתן גרף מלא עם מספר זוגי של צמתים מוצא בו זיווג מושלם ממשקל מינימלי.
- נשים לב שב- U מספר זוגי של צמתים כי סכום הדרגות בכל גרף הוא זוגי.

טענה. האלגוריתם הנ"ל הוא אלגוריתם 1.5 קירוב ל- TSP עם א"ש המשולש.

הוכחה.

$$w(A) \overset{(*)}{\leq} w(EC) = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M \overset{(**)}{\leq} w(OPT) + \frac{1}{2}w(OPT)$$

$(*)$ - א"ש המשולש.
$(**)$ - נראה מיד.
נוכיח כי $2w(M) \leq w(OPT)$. תחילה נקצר את המעגל OPT למעגל שעובר רק דרך צמתי U ונסמן את המעגל המתקבל ב- C. נצבע את קשתותיו לסירוגין בכחול ובשחור ונסמן את קבוצות הקשתות ב- C_1 ו- C_2. נשים לב שאלו הם זיווגים מושלים בתת הגרף המושרה על U. ולכן:

$$w(OPT) \overset{(*)}{\geq} w(C) = w(C_1) + w(C_2) \geq 2w(M)$$

$(*)$ - א"ש המשולש.

$\square$

נדון על TSP בלי א"ש המשולש.

פתרון. האם ניתן למצוא אלגוריתם קירוב פולינומיאלי ל- TSP ללא א"ש המשולש?

כנראה שלא. נראה שאם היינו יכולים לעשות את זה, אז היינו מוכיחים $P = NP$.

טענה. לכל $c \geq 1$ אם קיים אלגוריתם פולינומיאלי c - קירוב ל- TSP ללא א"ש המשולש אז $P = NP$.

הוכחה. יהי $c \geq 1$ ונניח שקיים אלגוריתם פולינומיאלי c–קירוב ל- TSP. נראה שבעזרתו ניתן להכאיע את בעיית מעגל המילטון:

$$UHC = \{G = (V, E) : \text{יש מעגל המליטון } G\text{–ב}\}$$

בזמן פולינומיאלי. מאחר שזו בעיה NP שלמה נסיק $P = NP$.
האלגוריתם: בהינתן גרף G נגדיר את G' להיות גרף מלא על צמתי G עם פונקציית משקל $w(e) = \begin{cases} 1 & e \in E(G) \\ c|V| & e \in E(G) \end{cases}$.
נפעיל על קלט זה את אלגוריתם c–קירוב ל- TSP. אם ב- G יש מעגל המילטון אז ב- G' יש מעגל המילטון ממשקל $|V|$. לכן אלגוריתם הקירוב יחזיר מעגל המילטון שמשקלו $c|V| \geq$. אם ב- G אין מעגל המילטון, אז כל מעגל המילטון של G' יהיה במשקל $c|V| <$ ולכן אלגוריתם הקירוב יחזיר מעגל שמשקלו $c|V| <$.
לסיכום, מהערך המוחזר ע"י אלגוריתם הקירוב נוכל להסיק האם יש או אין מעגל המילטון ב- G.
$\square$

הערה. ההוכחה הנ"ל נשארת נכונה לכל c שחסום ע"י פונקציה אקספוננציאלית של גודל הקלט כי עבור c כזה הרדוקציה עדיין תוכל לרוץ בזמן פולינומיאלי (משום שייצוג של מספר m בקידוד בינארי מצריך $\log m$ ביטים).