# סיבוכיות - תרגול 12

כל העולם הוא חישוב אחד גדול

5.6.11

נדבר על שיטות לעשות דרנדומיציה, כלומר להפוך אלגוריתם הסתברותי לאלגוריתם דטרמיניסטי.
נתחיל עם בעיית $MAX-CUT$. נתון גרף $G=(V,E)$ פשוט. המטרה שלנו היא לחלק את הגרף לשתי קבוצות $V_1 \uplus V_2 = V$ כך שמספר הקשתות בין $V_1$ ל- $V_2$ הוא המרבי.

**טענה.** יהי $G$ גרף עם $m$ קשתות. קיים ב- $G$ חתך בגודל $\frac{m}{2} \leq$.

הוכחה. נגריל חתך אקראי ונראה שתוחלת מספר הקשתות בו הוא $m/2$. לכל $v \in V$ בגרף נגריל צד בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן ב"ת בהגרלות האחרות. כל קשת תהיה בחתך בהסתברות $\frac{1}{2}$.
נגדיר לכל $e \in E$ מ"מ אינדיקטור $x_e$ שמקבל 1 אם $e$ בחתך ו-0 אחרת. כעת

$$\mathbb{E}(\text{מספר הקשתות בחתך}) = \mathbb{E}\left(\sum_{e\in E} x_e\right) = \sum_{e\in E}\mathbb{E}[x_e] = \frac{1}{2}m$$

לכן קיים חתך שגודלו לפחות $\frac{m}{2} \leq$. $\square$

נרצה למצוא חתך כזה ולא רק להוכיח שהוא קיים.

### שיטת התוחלות המותנות

ניתן לחמדן לבחור לאיזה צד יהיה שייך כל צומת. ההחלטה תתבצע בהסתמך על חישובי תוחלות.

**אבחנה.** בהיתן $G=(V,E)$ ופונקציה $c: V \to \{1,2,?\}$. ניתן לחשב את תוחלת גודל החתך במידה ו-

1. לכל $v$ כך ש- $c(v)=1$, $v$ יהיה בצד הראשון.
2. לכל $v$ כך ש- $c(v)=2$, $v$ יהיה בצד השני.
3. לכל $v$ כך ש- $c(v)=?$ בהסתברות חצי $v$ בצד הראשון ובהסתברות חצי בצד השני.

אם עבור $e=(v_1,v_2)$, $c(v_1) \neq c(v_2)$ ושניהם אינם ? אז $\mathbb{E}(x_e)=1$. אם עבור $e=(v_1,v_2)$, $c(v_1)=c(v_2)$ ושניהם אינם ? אז $\mathbb{E}(x_e)=0$. בכל מקרה אחר $\mathbb{E}(x_e)=\frac{1}{2}$.
האלגוריתם: נניח $V=\{v_1,\dots,v_n\}$. לכל $1 \leq i \leq n$ נחשב את תוחלת גודל החתך (אחרי שקבענו את המיקום ל- $v_1,\dots,v_{i-1}$) ונבחר באופן חמדן.
לפני שבחרנו מיקום לצומת הראשון התוחלת היא $\frac{m}{2}$. לאחר בחרנו את $c(v_1),\dots,c(v_2)$:

$$\mathbb{E}(CUT) = \frac{\mathbb{E}(CUT|c(v_i)=1)+\mathbb{E}(CUT|c(v_i)=2)}{2}$$

לכן באחת הבחירות נוכל לבחור חתך שגודלו $\mathbb{E}(CUT) \leq$ ובסיום נקבל לתך שגודלו $\frac{m}{2} \leq$.
החישוב לוקח $O(m)$ מבצעים אותו $O(n)$ פעמים ולכן סה"כ $O(mn)$.
נסתכל על בעיה שהיא הכללה של $MAX-CUT$: $MAX-kCUT$. נרצה למצוא חלוקה של הצמתים $V=V_1 \uplus \dots \uplus V_k$ כך שמספר הקשתות בין צדדים שונים מקסימלי.

**טענה.** לכל גרף $G$ עם $m$ קשתות $MAX-kCUT \geq m\left(\frac{1}{k}\right)$

הוכחה. נגריל לכל צומת צד באופן אחיד (כל צד הסתברות $\frac{1}{k}$) באופן ב"ת בבחירות האחרות. לכל קשת הסתברות $1-\frac{1}{k}$ לא להיות בחתך ולכן אם $x_e$ מ"מ אינדיקטור להימצאות $e$ בחתך היא $\mathbb{E}x_e = 1-\frac{1}{k}$.

$$\mathbb{E}[kCUT] = \mathbb{E}(\sum_{e\in E} x_e) = \sum_{e\in E}\mathbb{E}[x_e] = m\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

ולכן קיים חתך מגודל לפחות $m\left(\frac{1}{k}\right)$.

$\square$

שוב ניתן לעשות אלגוריתם פולינומי שמוצא חתך כזה, בדיוק כמו קודם.
בהינתן חתך חלקי (פונקציה $c: V\to\{1,2,\ldots,k,?\}$) ניתן לחשב את תוחלת גודל החתך לאחר שנבחר השמה מקרית לצמתים עם ? (כל קשת תתרום 0, 1 או $1-\frac{1}{k}$. נעבור על הצמתים לפי הסדר $v_1,\ldots,v_n$. בשלב ה- $i$ כבר קבענו מיקום ל- $v_1,\ldots,v_{i-1}$ ונקבע ל- $v_i$. נחשב $k$ תוחלות מותנות ב- $k$ ההשמות האפשריות של $v_i$ נבחר את ההשמה שנותנת את התוחלת הטובה ביותר.

**תרגיל.** יהי $G$ גרף. לכל צומת $v\in V$ נסמן $d(v)$ הדרגה שלו. $MAX-IS(G)\geq \sum_{v\in V}\frac{1}{d(v)+1}$.

הרעיון הוא שמסדרים את הצמתים של הגרף בפרמוטציה אקראית. נעבור צומת צומת לפי הפרמוטציה. לכל צומת נבדוק האם כל השכנים של הצומת נבחרו ל-$IS$? אם כן נמשיך ואם לא נוסיף אותו ל- $IS$. נקבל בסוף קבוצה ב"ת לכל צומת $v\in V$ ההסתברות שהוא יהיה פלני שכיו היא $\frac{1}{d(v)+1}$ ונקבל את הדרוש.