סיבוכיות – תרגול 9

כל העולם הוא חישוב אחד גדול

3.5.11

אלגוריתמי קירוב

מעגל המילטון בגרף לא מכוון הוא מעגל שעובר דרך כל צומת פעם אחת בדיוק.

$$UHC = \{G | \text{ב-}G\text{ יש מעגל המילטון}\}$$

אנחנו נדון בבעיה דומה.
בעיית הסוכן הנוסע TSP:

$$TSP = \left\{ \langle G, w, k \rangle \middle| \begin{array}{c} G \text{ גרף לא מכוון מלא} \\ w : E(G) \to \mathbb{R}^+ \text{ פונקצית משקל} \\ \text{קיים מעגל המילטון ב-}G\text{ שמשקלו הכולל } \leq k \end{array} \right\}$$

טענה. TSP היא NP שלמה.

הוכחה. ברור שהבעיה ב- NP (המסלול הוא עד). נראה רדוקציה $UHC \underset{\text{P}}{\leq} TSP$.
הרדוקציה, בהינתן גרף G תחזיר שלשה $\langle G', w, k \rangle$ כאשר G' גרף מלא על צמתי G ופונקצית המשקל w מוגדרת ע"י

$$w(e) = \begin{cases} 1 & e \in E(G) \\ 2 & \text{אחרת} \end{cases}$$

וכן $k = |V(G)|$. ברור שניתן לממש בזמן פולינומיאלי.
נכונות: אם ב- G יש מעגל המילטון אז אותו מעגל הוא מעגל המילטון ב- G' ומשקלו k, ואילו אם ב- G אין מעגל המילטון אז כל מעגל המילטון ב- G' משתמש בקשת שמשקלה 2 ולכן משקלו לפחות $k+1$. $\square$

לבעיה כמו שהיא עכשיו אין אלגוריתם קירוב טוב. בשביל אלגוריתם קירוב טוב נצטרך לדרוש עוד קצת:
TSP עם אי־שוויון משולש: פונקציית המשקל מקיימת:

$$\forall x, y, z \in V(G) \qquad w((x,y)) + w((y,z)) \geq w((x,z))$$

האם גם הבעיה הזאת היא קשה? כן. בדיוק אותה רדוקציה תעבוד, פונקצית המשקל שבנינו מקיימת את אי שוויון המשולש.
נציג אלגוריתם 2– קירוב ל- TSP עם א"ש המשולש. האלגוריתם יחזיר מעגל המילטון שמשקלו לכל היותר פי 2 ממשקל מעגל ההמילטון שמשקלו נמוך ביותר. קלט: $\langle G, w \rangle$.

האלגוריתם:

1. נמצא עץ פורש מינימלי T ב- G ונכפיל את קשתותיו.
2. בגרף המתקבל נמצא מעגל אוילר EC (אפשרי כי כל הדרגות זוגיות).
3. ממעגל ההמילטון שנחזיר הוא המעגל המתקבל מהילוך על מעגל אוילר EC ופסיחה על צמתים שכבר ביקרנו בהם.

נטען: האלגוריתם מחזיר 2–קירוב.
נסמן: OPT – מעגל ההמילטון עם משקל מינימלי ב- G. A – מעגל ההמילטון שהוחזר ע"י האלגוריתם.
נשים לב $w(T) \leq w(OPT)$ כי בהסרת קשת מ- OPT מתקבל עץ פורש ו- T הוא העץ הפורש שמשקלו מינימלי. מא"ש המשולש $w(A) \leq w(EC)$.

$$w(A) \leq w(EC) = 2w(T) \leq 2w(OPT)$$

הוכחות אינטרקטיביות

$$GI = \{\langle G_1, G_2 \rangle | G_1 \sim G_2\}$$

$GI \in NP$ העד הוא פרמוטציה π עבורה $\pi(G_1) = G_2$. אנחנו לא יודעים להראות $\overline{GI} = GNI$ ב- NP.
בהוכחה אינטרקטיבית יש מוכיח P כל יכול", ומוודא" V פולינומיאלי עם מטבעות אינטרקטיביים.
המחלקה המתאימה היא $IP_{\alpha,\beta}[k]$ כאשר k הוא מספר הסיבובים.
$x \in L$ אז קיים מוכיח P עבורו V מקבל בהסתברות $\leq \beta$ (על פני המטבעות של V).
$x \notin L$ לכל מוכיח P, V מקבל בהסתברות $\geq \alpha$.
$GNI \in IP$: המוודא V מגריל $b \in \{1,2\}$ ופרמוטציה π ושולח ל- P את $\pi(G_b)$. המוכיח צריך לגלות את b, אם מחזיר b V יקבל ואחרת דוחה.
נרצה לשפר את סיכוי השגיאה.
פתרון אחד, הוא "חזרה סדרתית" – נחזור על הפרוטוקול l פעמים (עם הגרלות ב"ת). נקבל $GNI \in IP_{\frac{1}{2^l},1}[2l]$.
אבל אין באמת צורך לשלוח l פעמים, השאלות שלנו לא תלויות בתשובות שאנחנו מקבלים לכן, אפשר להשתמש ב"חזרה מקבילית" – V מגריל $b_1, \ldots, b_l \in \{1,2\}$ ופרמוטציות $\pi_1, \ldots, \pi_l$ ושולח את $\pi_i(G_{b_i})$ לכל $1 \leq i \leq l$ ומקבל אם ורק אם P השיב $b_1, \ldots, b_l$.
כעת, $GNI \in IP_{\frac{1}{2^l},1}[2]$ עבור l שחסום ע"י פולינום בגודל הקלט.