

# מבוא להסתברות

© ארזים

30 במרץ 2016

## 1 משתנים מקריים והתפלגויות

נתון מרחב הסתברות  $(\Omega, \mathbb{P})$ .

**הגדרה 1.1** תהי  $S$  קבוצה. משתנה מקרי  $X$  המקבל ערכים בקבוצה  $S$  הוא פונקציה  $X : S \rightarrow S$ . אם  $S = \mathbb{R}$  שמתקיים בדרך כלל נתון שמתקיים  $S = \mathbb{R}$ .

### דוגמאות:

1. מטילים קוביה הוגנת פעמיים. יהי  $X$  סכום ערכי התוצאות בזוג ההטלות. באופן מפורט:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\} \\ \mathbb{P}((i, j)) &= \frac{1}{36} \\ X &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ X((i, j)) &= i + j\end{aligned}$$

2. מטילים מטבע עם הסתברות  $\frac{1}{3}$  לעץ ארבע פעמים.  $Y_1$  - כמות העצים בשתי ההטלות הראשונות.  $Y_2$  - כמות העצים בהטלות השנייה והשלישית.  $Y_3$  - כמות העצים השתי ההטלות האחרונות. באופן מפורט: נסמן עץ בתור 1 ופלי בתור 0.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{0, 1\}^4 \\ \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4 - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)} \\ Y_1, Y_2, Y_3 &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ Y_1((\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)) &= \omega_1 + \omega_2 \\ Y_2((\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)) &= \omega_2 + \omega_3 \\ Y_3((\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)) &= \omega_3 + \omega_4\end{aligned}$$

3. נתון מרחב ההסתברות  $(\Omega, \mathbb{P})$  ומאורע  $A \subseteq \Omega$ . המשתנה המקרי האינדיקטור של המאורע מסומן  $1_A$ , והוא משתנה מקרי  $1_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  שמוגדר על ידי

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

### 1.1 התפלגויות

תהי  $S$  קבוצה.

**הגדרה 1.2** התפלגות היא פונקציה  $\mu : S \rightarrow [0, 1]$  כך שהקבוצה  $\{x \in S \mid \mu(x) \neq 0\}$  היא סופית או בת מניה, וכן

$$\sum_x \mu(x) = 1$$

**הערה 1.3** עבור  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , נקרא לקבוצה  $\{x \in S \mid f(x) \neq 0\}$  התומך של  $f$ . כאשר התומך של  $f$  סופי או בן מניה, נסמן

$$\sum_x f(x)$$

עבור הטור שבו  $x$  נמצא בתומך של  $f$ . הסכום מוגדר היטב כאשר  $f$  מקבלת ערכים אי-שליליים, או שהטור מתכנס בהחלט, כלומר

$$\sum_x |f(x)| < \infty$$

### דוגמאות:

1.  $S = \mathbb{R}$ , ונגדיר  $\mu(1) = \frac{1}{2}, \mu(0) = \frac{1}{2}$ , ועבור כל  $x \notin \{0, 1\}$ ,  $\mu(x) = 0$ .
2.  $S = \mathbb{R}$ , נגדיר  $\mu(k) = \frac{1}{2^k}$  עבור  $k \geq 1$  שלם, ועבור  $x$  שאינו שלם חיובי,  $\mu(x) = 0$ .
3. כאשר  $(\Omega, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות (בפרט  $\Omega$  סופית או בת מניה), הפונקציה  $\mathbb{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$  היא התפלגות, כאשר  $S = \Omega$ .

**הגדרה 1.4** (התפלגות של משתנה מקרי) נתון מרחב הסתברות  $(\Omega, \mathbb{P})$  ומשתנה מקרי  $X : \Omega \rightarrow S$ . ההתפלגות של  $X$  היא התפלגות על  $S$  שתסומן  $\mu_X$  ותוגדר לכל  $x \in S$  על ידי

$$\mu_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

**הערה 1.5** המאורע  $\{X = x\}$  הוא למעשה

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

**טענה 1.6** ההתפלגות של משתנה מקרי  $X$  היא אכן התפלגות על  $S$ .

**הוכחה:** התומך של  $\mu_X$  סופי או בן מניה, כלומר

$$\{x \in S \mid \mathbb{P}(X = x) > 0\}$$

היא סופית או בת מניה, כי  $\Omega$  סופית או בת מניה, והמאורע  $\{X = x\}$  ריק אם  $x$  אינו בתמונה של  $\omega$  דרך  $X$ . ברור שמתקיים

$$\mu_X(x) = \mathbb{P}(X = x) \in [0, 1]$$

לכן נותר לוודא שמתקיים

$$\sum_x \mu_X(x) = 1$$

נסמן  $T = \{x \in S \mid \exists \omega \in \Omega. X(\omega) = x\}$  אזי

$$\sum_x \mu_X(x) = \sum_{x \in T} \mu_X(x) = \sum_{x \in T} \mathbb{P}(X = x)$$

נבחים כעת כי מתקיים

$$\Omega = \bigcup_{x \in T} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} = \bigcup_{x \in T} \{X = x\}$$

ושמאורעות אלו הם זרים, כאשר  $T$  סופית או בת מניה. לכן

$$\sum_{x \in T} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in T} \{X = x\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

■

### התפלגויות המשתנים המקריים בדוגמאות:

1.  $X$  מקבל את הערכים  $\{2, \dots, 12\}$  בהתפלגות חיובית, כלומר הם התומך של  $\mu_X$ .

$$\begin{aligned} \mu_X(2) &= \mu_X(X=2) = \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36} \\ \mu_X(3) &= \mu_X(X=3) = \mathbb{P}(\{(1,2), (2,1)\}) = \frac{2}{36} \\ \mu_X(j) &= \begin{cases} \frac{j-1}{36} & 1 \leq j \leq 7 \\ \frac{13-i}{36} & 8 \leq j \leq 12 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

צורת רישום: נרשום לפעמים

$$X \sim \begin{cases} 2 & \frac{1}{36} \\ 3 & \frac{2}{36} \\ 4 & \frac{3}{36} \\ \vdots & \vdots \\ 12 & \frac{1}{36} \end{cases}$$

2. התומך של התפלגות  $Y_1$  הוא  $\{0, 1, 2\}$ , ומתקיים

$$Y_1 \sim \begin{cases} 0 & \frac{4}{9} \\ 1 & \frac{4}{9} \\ 2 & \frac{1}{9} \end{cases}$$

כמו כן, עבור  $Y_2$  מתקיים

$$Y_2 \sim \begin{cases} 0 & \frac{4}{9} \\ 1 & \frac{4}{9} \\ 2 & \frac{1}{9} \end{cases}$$

אבל נשים לב שאין שוויון בין שני המשתנים המקריים, כי כפונקציות על  $\Omega$  הם משתנים מקריים שונים. למשל

$$Y_1((0, 0, 1, 1)) = 0 \neq 1 = Y_2((0, 0, 1, 1))$$

יחד עם זאת,  $Y_1, Y_2$  הם שווי-התפלגות, שכן

$$\mu_{Y_1} = \mu_{Y_2}$$

למעשה, נאמר ששני משתנים מקריים  $X, Y$  הם שווי התפלגות אם לכל  $x$ ,

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$$

**הערה 1.7** אם  $X$  שווה  $Y$ , אז  $X, Y$  שווי-התפלגות.

3. יהי  $(\Omega, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות, ויהי  $A \subseteq \Omega$  מאורע.

$$1_A \sim \begin{cases} 1 & \mathbb{P}(A) \\ 0 & 1 - \mathbb{P}(A) \end{cases}$$

## 1.2 זוג משתנים מקריים

כאשר  $X, Y$  משתנים מקריים על אותו מרחב הסתברות  $(\Omega, \mathbb{P})$ , נאמר  $X, Y : \Omega \rightarrow S$  אזי אפשר גם לחשוב על  $X, Y$  כמשתנה מקרי אחד  $(X, Y)$  שמקבל ערכים בקבוצה  $S^2$  ומוגדר על ידי

$$(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \in S^2$$

למשתנה זה יש התפלגות  $\mu_{(X,Y)}$  שהיא התפלגות על  $S^2$  ותקרא ההתפלגות המשותפת של  $X, Y$ . בהקשר זה, ההתפלגויות של  $X, Y$  בנפרד מכונות התפלגויות שוליות. בדוגמה 2 של קודם, מהי ההתפלגות המשותפת של  $Y_1, Y_2$ ? כיוון שהתומך של התפלגות  $Y_1$  הוא  $\{0, 1, 2\}$ , והדבר נכון גם עבור  $Y_2$ , נובע שהתומך של  $(Y_1, Y_2)$  מוכל בקבוצה  $\{0, 1, 2\}^2$ . נחשב

$$\mu_{(Y_1, Y_2)}(0, 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(\{(0, 0, 0, j)\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

נוח להציג התפלגות משותפת של זוג משתנים מקריים בטבלה.

	2	1	0	$Y_1/Y_2$
0	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$	0	0
$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6}{27}$	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$	1
$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$	0	2

נחשב את ההתפלגויות המשותפת והשוליות של  $Y_1, Y_3$  ההתפלגות השולית של  $Y_3$  זהה לשל  $Y_1$ . כמו כן, המאורעות  $Y_1 = x, Y_3 = y$  הם בלתי תלויים, כי הם מאורעות במרחב מכפלה שמדברים על קואורדינטות שונות.

כעת,

	2	1	0	$Y_1/Y_3$
$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9}$	$\left(\frac{4}{9}\right)^2$	$\left(\frac{4}{9}\right)^2$	0
$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9}$	$\left(\frac{4}{9}\right)^2$	$\left(\frac{4}{9}\right)^2$	1
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9}$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9}$	2

אנו רואים כעת דוגמה למצב בו לאותו זוג התפלגויות שוליות יש התפלגות משותפת שונה. בשני המקרים. במלים אחרות, ההתפלגויות השוליות אינן קובעות את ההתפלגות המשותפת. ההתפלגויות השוליות נקבעות מההתפלגות המשותפת. אכן, עבור משתנים מקריים  $X, Y$ ,

$$\{X = x\} = \bigcup_y (\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

וזה איחוד זר, בו לכל היותר מספר בן מניה של גורמים לא ריקים. לכן,

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_Y \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$