

# מבוא להסתברות

© ארזים

3 באפריל 2016

## 1 משתנים מקריים והתפלגות

ניזכר: בהנתן מרחב הסתברות  $(\Omega, \mathbb{P})$  וקבוצה  $S$ , משתנה מקרי שמקבל ערכים בקבוצה  $S$  הוא פונקציה  $X: \Omega \rightarrow S$ .  
בתפלגות על  $S$  היא פונקציה  $\mu: S \rightarrow [0, 1]$ , בעלת תומך סופי או בן מניה, כאשר התומך הוא  $\{x \in S \mid \mu(x) \neq 0\}$ , שמקיימת

$$\sum_{x \in S} \mu(x) = 1$$

ההתפלגות של המשתנה המקרי  $X$  היא

$$\mu_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

כאשר המאורע  $\{X = x\}$  הוא למעשה

$$\{X = x\} = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

**דוגמא:** מטילים מטבע עם הסתברות  $\frac{1}{3}$  לעץ ארבע פעמים.  $Y_1$  - כמות העצים בהטלות 1,2;  $Y_2$  - כמות העצים בהטלות 2,3;  $Y_3$  - כמות העצים בהטלות 3,4. לכל  $1 \leq i \leq 3$ , מתקיים:

$$Y_i \sim \begin{cases} 0 & \frac{4}{9} \\ 1 & \frac{4}{9} \\ 2 & \frac{1}{9} \end{cases}$$

בפרט,  $Y_1, Y_2, Y_3$  שווי התפלגות.

2	1	0	$Y_1/Y_2$
0	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	0
$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$	1
$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}$	0	2

ראינו גם כי ניתן להשיג את ההתפלגויות השוליות מההתפלגות המשותפת:

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_1 = 0, Y_2 = 0) + \mathbb{P}(Y_1 = 0, Y_2 = 1) + \mathbb{P}(Y_1 = 0, Y_2 = 2)$$

## 1.1 התפלגות מותנה

בהינתן מאורע  $A \subseteq \Omega$  עם הסתברות חיובית, נוכל לשאול מה ההתפלגות של משתנה מקרי  $X$  במרחב ההסתברות המותנה במאורע  $A$ . כלומר, נרצה לדעת הסתברויות מהצורה  $\mathbb{P}(X = x | A)$ .  
מקרה נפוץ: נתון משתנה מקרי נוסף  $Y$  וערך  $y$  כך שמתקיים  $\mathbb{P}(Y = y) > 0$ , והמאורע  $A = \{Y = y\}$  הוא  $A$  למשל, בדוגמא,

$$\mathbb{P}(Y_1 = x | Y_2 = 2) = \frac{\mathbb{P}(Y_1 = x, Y_2 = 2)}{\mathbb{P}(Y_2 = 2)}$$

נקבל מהטבלה שההתפלגות השולית היא

$$\mathbb{P}(Y_2 = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$$

וכעת נקבל

$$\mathbb{P}(Y_1 = x | Y_2 = 2) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{2}{3} & x = 1 \\ \frac{1}{3} & x = 2 \end{cases}$$

## 2 משתנים מקריים רבים

כאשר נתונים  $n$  משתנים מקריים,  $X_1, X_2, \dots, X_n : \Omega \rightarrow S$ , ניתן לדבר על ההתפלגות המשותפת שלהם, שהיא ההתפלגות של הווקטור  $(X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow S^n$  - זהו משתנה מקרי שמקבל ערכים בקבוצה  $S^n$ , שמוגדר לפי

$$(X_1, \dots, X_n)(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

לווקטור זה ההתפלגות

$$\mu_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

בהקשר זה, נקרא להתפלגות של כל תת-קבוצה של המשתנים התפלגות שולית. למשל

$\mu_{X_1}, \mu_{(X_1, X_2)}$  וכדומה.

**דוגמה:** הילוך מקרי פשוט.

מטילים מטבע הוגן  $n$  פעמים. נסמן בתור  $X_i$  את המשתנה שמקבל 1 אם יצא עץ בהטלה שמספרה  $i$ , ומקבל -1 אם יצא פלי. נגדיר  $n+1$  משתנים מקריים נוספים:

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_1 &= X_1 \\ S_2 &= X_1 + X_2 \\ &\vdots \\ S_n &= X_1 + \dots + X_n \end{aligned}$$

זהו למעשה הילוך מקרי - בכל תור, מטילים מטבע, והולכים צעד למעלה או צעד למטה (1 או -1).

**הערה 2.1** כאן הגדרנו משתנים מקריים כפונקציה של משתנים אחרים. באופן כללי, כאשר  $X_1, \dots, X_n$  משתנים מקריים בעלי ערכים בקבוצה  $S$ , ונתונה פונקציה  $f: S^n \rightarrow T$ , המשתנה מקרי  $Y = f(X_1, \dots, X_n)$  מוגדר כמשתנה המקרי שמקבל ערכים בקבוצה  $T$  על ידי  $Y(\omega) = f(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ . נחזור לדוגמה. ננסה להבין את ההתפלגות המשותפת של  $S_0, \dots, S_1$ .

$$(S_0, S_1) \sim \begin{cases} (0, 1) & \frac{1}{2} \\ (0, -1) & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(S_0, S_1, S_2) \sim \begin{cases} (0, 1, 2) & \frac{1}{4} \\ (0, 1, 0) & \frac{1}{4} \\ (0, -1, 0) & \frac{1}{4} \\ (0, -1, -2) & \frac{1}{4} \end{cases}$$

ההתפלגות של כל המשתנים יחד נתמכת על ידי הקבוצה

$$\{(s_0, s_1, \dots, s_n) \mid s_0 = 0, |s_{i+1} - s_i| = 1 \forall 0 \leq i \leq n-1\}$$

וכל איבר בקבוצה זו מתקבל בהסתברות שווה,  $\frac{1}{2^n}$ . מהי ההתפלגות השולית של  $S_n$ ? ניתן לקבל אותה כסכום מההתפלגות המשותפת:

$$\mathbb{P}(S_n = s_n) = \sum_{s_0, \dots, s_{n-1}} \mathbb{P}(S_0 = s_0, \dots, S_{n-1} = s_{n-1}, S_n = s_n)$$

ראינו בתרגול שמתקיים

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot 2^{-n} & |k| \leq n, k+n \equiv 0 \pmod{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$