

מבוא להסתברות

© ארזים

6 באפריל 2016

דוגמא: הילוך מקרי פשוט

מילים מטבע הוגן n פעמים. X_i מוגדר להיות 1 אם ההטלה שמספרה i הייתה עץ, או -1 אחרת. כמו כן, נגדיר

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_1 &= X_1 \\ &\vdots \\ S_n &= X_1 + \dots + X_n \end{aligned}$$

מידול: נבחר בתור מרחב מדגם Ω את

$$\Omega = \{H, T\}^n$$

וניקח את ההסתברות כך שנקבל מרחב מכפלה, כלומר לכל $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{2^n}$$

כעת נבחן את המשתנים המקריים שלנו.

$$X_i(\omega) = X_i((\omega_1, \dots, \omega_n)) = \begin{cases} 1 & \omega_i = T \\ -1 & \omega_i = H \end{cases}$$

וכעת S_i הוא פונקציה של X_1, \dots, X_i , או באופן מפורש,

$$\begin{aligned} S_i &= f_i(X_1, \dots, X_i) \\ f_i(x_1, \dots, x_i) &= x_1 + \dots + x_i \end{aligned}$$

תקיון טעות משיעור שעבר:

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \cdot 2^{-n} & |k| \leq n, k+n \equiv 0 \pmod{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

התיקון הוא החלפת $\binom{n}{k}$ במקדם בינומי אחר $\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$.

1 אי-תלות של משתנים מקריים

הגדרה 1.1 משתנים מקריים $X_i : \Omega \rightarrow S_i$, כאשר $1 \leq i \leq n$ נקראים בלתי-תלויים אם לכל הצבה אפשרית של $x_i \in S_i$, כאשר $1 \leq i \leq n$, מתקיים

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

מקרה פרטי: נתונים מאורעות A_1, \dots, A_n . נגדיר משתנים מקריים $X_i = 1_{A_i}$.

טענה 1.2 A_1, \dots, A_n בלתי-תלויים אם ורק אם X_1, \dots, X_n בלתי-תלויים.

הוכחה: אם אפילו אחד מבין x_i אינו 0 או 1, אזי

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = 0 = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

נתבונן למשל במאורע

$$\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \cdots \cap \{X_n = 1\} = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

לכן

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1, \dots, X_n = 1) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \\ \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdots \mathbb{P}(X_n = 1) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \end{aligned}$$

באופן דומה,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_n = 0) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) \\ \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdots \mathbb{P}(X_n = 0) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c) \end{aligned}$$

כאשר נעבור על כל האפשרויות להצבות של $x_i \in \{0, 1\}$, נקבל את כל החיזוקים

$$\bigcap_{i=1}^n B_i$$

כאשר לכל i מתקיים

$$B_i \in \{A_i, A_i^c\}$$

מכאן נסיק שאי-תלות של המשתנים המקריים גוררת אי-תלות של המאורעות, ולהיפך, כי ראינו שמספיק לבדוק את האופציות להצבות של $x_i \in \{0, 1\}$. ■

הערה 1.3 מכאן, למשל, שיתכן שהמשתנים המקריים X_1, X_2, X_3 בלתי-תלויים בזוגות, כלומר כל זוג הוא בלתי-תלוי, אבל השלישייה לא תהיה בלתי-תלוייה.

הערה 1.4 בדוגמת ההילוך המקרי הפשוט, כל תת-אוסף של X_i הוא בלתי-תלוי. נראה זאת לגבי X_1, \dots, X_n . ההסתברות

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

היא 0 אם לפחות אחד מבין x_i אינו 1 או -1, והיא 2^{-n} אחרת, משום שאלה קואורדינטות זרות במרחב מכפלה. לסיים, אותו הדבר נכון גם לגבי

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

1.1 טענות בסיסיות לגבי אי-תלות של משתנים מקריים

טענה 1.5 המשתנים X_1, \dots, X_n בלתי-תלויים אם ורק אם X_1 בלתי-תלוי בווקטור (X_2, \dots, X_n) , וגם X_2, \dots, X_n בלתי-תלויים.

הוכחה: כיוון ראשון: נניח כי X_1 והווקטור בלתי-תלויים, וכי קואורדינטות הווקטור בלתי-תלויים. נרשום

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) &= \mathbb{P}(X_1 = x_1, (X_2, \dots, X_n) = (x_2, \dots, x_n)) = \\ &= \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}((X_2, \dots, X_n) = (x_2, \dots, x_n)) = \\ &= \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n) \end{aligned}$$

כיוון שני: דומה. נניח כי X_1, \dots, X_n בלתי-תלויים. נראה קודם כי X_1 בלתי תלוי בווקטור.

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, (X_2, \dots, X_n) = (x_2, \dots, x_n)) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

נותר להוכיח כי

$$\mathbb{P}(X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

דהיינו, נותר להוכיח כי X_2, \dots, X_n בלתי-תלויים, וזה תוכן הטענה הבאה, לכן נעזור כאן ונראה אותה. ■

טענה 1.6 אם X_1, \dots, X_n בלתי-תלויים, עבור $n \geq 3$, אזי גם X_2, \dots, X_n בלתי-תלויים. באינדוקציה, כל תת-אוסף של X_i הוא בלתי-תלוי.

הוכחה: נקבע x_2, \dots, x_n . צריך להוכיח:

$$\mathbb{P}(X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

נסמן

$$T = \{x_1 \mid \exists \omega \in \Omega : X_1(\omega) = x_1\}$$

בהכרח T סופית או בת־מניה. נשים לב שמתקיים

$$\{X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = \bigcup_{x_1 \in T} \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}$$

וזהו כמובן איחוד זר. לכן

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) &= \sum_{x_1 \in T} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \\ &= \sum_{x_1 \in T} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n) \end{aligned}$$

כעת נותר להוכיח

$$\sum_{x_1 \in T} \mathbb{P}(X_1 = x_1) = 1$$

והדבר נכון משום שמתקיים

$$\Omega = \bigcup_{x_1 \in T} \{X_1 = x_1\}$$

■

וזהו איחוד זר.

בכך סיימנו גם את הוכחת הטענה הראשונה.

טענה 1.7 יהיו $X_1, X_2 : \Omega \rightarrow S$ משתנים מקריים בלתי־תלויים. תהי S' קבוצה נוספת, ותהי $f : S \rightarrow S'$ אפי $f(X_1), X_2$ בלתי־תלויים.

הוכחה: צריך להוכיח כי לכל a_1, x_2 מתקיים

$$\mathbb{P}(f(X_1) = a_1, X_2 = x_2) = \mathbb{P}(f(X_1) = a_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2)$$

נקבע a_1, X_2 נשים לב שאם נסמן

$$E_{a_1} = \{x_1 \in S \mid f(x_1) = a_1\} = f^{-1}(\{a_1\})$$

נשים לב שיש שוויון בין המאורעות

$$\{f(x_1) = a_1\} = \{X_1 \in E_{a_1}\}$$

יש להוכיח כי

$$\mathbb{P}(X_1 \in E_{a_1}, X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 \in E_{a_1}) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2)$$

כמו קודם, נסמן

$$T = \{x_1 \mid \exists \omega \in \Omega : X_1(\omega) = x_1\}$$

וזו קבוצה סופית או בת־מניה. כעת נבחין כי

$$\{X_1 \in E_{a_1}\} = \{X_1 \in E_{a_1} \cap T\}$$

ולכן נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות שהקבוצה E_{a_1} סופית או בת־מניה. כעת, נרשום

$$\{X_1 \in E_{a_1}\} = \bigcup_{x_1 \in E_{a_1}} \{X_1 = x_1\}$$

וזהו כמובן איחוד זר, ולכן גם

$$\{X_1 \in E_{a_1}\} \cap \{X_2 = x_2\} = \bigcup_{x_1 \in E_{a_1}} (\{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = x_2\})$$

וזהו איחוד זר, ולכן

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 \in E_{a_1}, X_2 = x_2) &= \sum_{x_1 \in E_{a_1}} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \sum_{x_1 \in E_{a_1}} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdot \sum_{x_1 \in E_{a_1}} \mathbb{P}(X_1 = x_1) = \mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdot \mathbb{P}(X_1 \in E_{a_1}) \end{aligned}$$

■

מסקנה 1.8 אם X_1, \dots, X_n בלתי־תלויים, f פוקנציה, אזי גם $f(X_1, \dots, X_k), X_{k+1}, \dots, X_n$ בלתי־תלויים.

הוכחה: נסמן $X = (X_1, \dots, X_k)$, $Y = (X_{k+1}, \dots, X_n)$. מהנתון, X, Y בלתי־תלויים. מהטענה השלישית, $f(X), Y$ בלתי־תלויים. כמו כן, וודאי X_{k+1}, \dots, X_n (מהטענה השנייה). כעת, מן הטענה הראשונה, $f(X), X_{k+1}, \dots, X_n$ גם כן בלתי־תלויים.

■

מסקנה 1.9 אם X_1, \dots, X_n בלתי-תלויים, f_i פונקציות, אזי $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ גם הם בלתי-תלויים.

למשל, בדוגמת ההילוך המקרי הפשוט:

$$S_{17} - S_{10}, S_{10} - S_6, X_1, X_2$$

אלה משתנים מקריים בלתי תלויים, שכן

$$\begin{aligned} S_{17} - S_{10} &= X_{11} + X_{12} + \dots + X_{17} \\ S_{10} - S_6 &= X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} \end{aligned}$$

לכן אלה למעשה פונקציות על משתנים מקריים בלתי-תלויים, ולכן מה שראינו היא קבוצה בלתי-תלוייה של משתנים מקריים.

מסקנה 1.10 יהיו X_1, \dots, X_n משתנים מקריים בלתי-תלויים, כאשר $X_i : \Omega \rightarrow S_i$, ויהיו E_1, \dots, E_n קבוצות, כאשר $E_i \subseteq S_i$. אזי

$$\mathbb{P}(X_1 \in E_1, \dots, X_n \in E_n) = \mathbb{P}(X_1 \in E_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in E_n)$$

הוכחה: נגדיר $f_i : S_i \rightarrow \{0, 1\}$ על ידי

$$f_i(s) = \begin{cases} 1 & s \in E_i \\ 0 & s \notin E_i \end{cases}$$

אזי

$$\{X_i \in E_i\} = \{f_i(X_i) = 1\}$$

מהמסקנה הקודמת, $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ בלתי-תלויים, ומכאן נובע

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 \in E_1, \dots, X_n \in E_n) &= \mathbb{P}(f_1(X_1) = 1, \dots, f_n(X_n) = 1) = \\ &= \mathbb{P}(f_1(X_1) = 1) \cdots \mathbb{P}(f_n(X_n) = 1) = \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in E_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in E_n) \end{aligned}$$

■