

## מבוא להסתברות

© ארזים

1 במאי 2016

הראינו כי התוחלת של משתנה מקרי  $X$  שווה לערך הטור:

$$\mathbb{E}X = \sum_x \mathbb{P}(X = x) \cdot x$$

מסקנה מנוסחא זו:

**מסקנה 0.1** התוחלת של  $X$  ניתנת לחישוב מהתפלגות  $X$ .

**דוגמאות**

1. התפלגות ברנולי:

$$X \sim \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$$
$$\mathbb{E}(X) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$$

בפרט, אם  $A$  מאורע, אזי

$$\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$$

2. התפלגות גיאומטרית:

$$X \sim \left\{ p(1-p)^{k-1} \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \cdot k = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} (k-1) + \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = \sum_{m=1}^{\infty} p(1-p)^m \cdot m + 1 = \\ &= (1-p) \sum_{m=1}^{\infty} p(1-p)^{m-1} \cdot m + 1 = (1-p) \mathbb{E}(X) + 1 \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

מקרה פרטי -  $\mathbb{E}(X) = 2 \Leftarrow X \sim \text{Geom}(\frac{1}{2})$

3. התפלגות פואסון:

$$X \sim \left\{ e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k \in \mathbb{N} \right.$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda$$

4. התפלגות בינומית:

$$X \sim \left\{ \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n \right.$$

$$\mathbb{E}(X) = np$$

### הומוגניות ולינאריות התוחלת

**משפט 0.2** (הומוגניות) יהי  $X$  משתנה מקרי בעל תוחלת מוגדרת, ויהי  $c$  מספר ממשי. אזי התוחלת של  $c \cdot X$  מוגדרת, ומתקיים  $\mathbb{E}(c \cdot X) = c \cdot \mathbb{E}(X)$  (מניחים כאן  $0 \cdot \infty = 0$ ).

**משפט 0.3** (לינאריות) יהיו  $X, Y$  משתנים מקריים. אזי

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

כאשר אגף ימין מוגדר.

נשתמש בזאת כדי לחשב את התוחלת של משתנה בינומי, ונוכיח את המשפטים בשיעור הבא: יהיו  $X_1, \dots, X_n \sim \text{Ber}(p)$  באופן בלתי תלוי. יהי  $X = X_1 + \dots + X_n$ . אזי  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  מלינאריות, מתקיים

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = n \cdot p$$