

מבוא להסתברות

© ארזים

8 ביוני 2016

ניזכר במשפט הארגודי לשרשראות מרקוב, אותו ראינו ונוכיח:

משפט 0.1 תהי שרשרת מרקוב היא אי פריקה וחסרת מחזור בעלת התפלגות סטציונרית π . אזי לכל התפלגות התחלתית μ ולכל מצב $x \in S$ מתקיים

$$\mathbb{P}_\mu(X_t = x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \pi(x)$$

למה 0.2 (למת המפתח) עבור שרשרת מרקוב אי פריקה וחסרת מחזור, קיים r כך שלכל $x, y \in S$

$$\mathbb{P}_x(X_r = y) > 0$$

נזדקק ללמה מתורת המספרים (לכו קחו את הקורס):

למה 0.3 תהי T קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים כך שמתקיים $\gcd(T) = 1$. אזי קיים $n_0 > 0$ שלם כך שלכל $n \geq n_0$, נוכל לכתוב

$$n = a_1 t_1 + \dots + a_m t_m$$

כאשר $a_i > 0$ לכל i , וכן $t_i \in T$ לכל i .

דוגמה עבור $T = \{5, 7\}$, המספרים שנוכל לכתוב הם

0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, ...

נוכל לבחור $n_0 = 24$ ולקבל את הנדרש.

הוכחה: ראשית, אפשר להניח כי T סופית, משום שבתוך T תמיד יש קבוצה סופית שעבורה המחלק המשותף הגדול ביותר הוא 1. אכן, יהי $a_0 \in T$. אם $a_0 = 1$ אזי הקבוצה $\{1\} \subseteq T$, ועבורה המחלק המשותף המקסימלי הוא 1. אם לא, אז לכל מספר $1 < d \leq a_0$, קיים בקבוצה T מספר a_d שאינו מתחלק בו, כלומר $d \nmid a_d$, כי $\gcd(T) = 1$. ניקח את הקבוצה $\{a_0, a_2, \dots, a_{a_0}\}$, ולפי הגדרה נקבל שהמחלק המשותף המקסימלי הוא 1.

כעת, נרשום $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ אזי קיימים a_1, \dots, a_n שלמים כך שמתקיים $1 = a_1 t_1 + \dots + a_n t_n$. נוכיח זאת: נסמן r את המספר הטבעי הנמוך ביותר כך שקיימים a_1, \dots, a_n כך שמתקיים $r = a_1 t_1 + \dots + a_n t_n$. נרצה להראות כי $r = 1$. נניח בשלילה כי $r > 1$. כיוון שמתקיים $\gcd(T) = 1$, נובע שקיים t_i כך שמתקיים $r \nmid t_i$. בלי הגבלת הכלליות, $i = 1$. נרשום $t_1 = k \cdot r + s$, עבור k שלם, $0 < s < r$. כעת, $s = t_1 - k \cdot r = t_1 - k(a_1 t_1 + \dots + a_n t_n) = (1 - k a_1) t_1 - k a_2 t_2 - \dots - k a_n t_n$. את s כצירוף בשלמים של איברי t , למרות שמתקיים $s < r$ - בסתירה למינימליות של $r = 1$.

כעת נותר רק להראות את הטענה מהלמה. יהי n טבעי. על ידי הכפלת הייצוג של 1 בקבוע n נקבל $n = b_1 t_1 + \dots + b_m t_m$ עבור שלמים b_1, \dots, b_m . כלשהם. נבחין כי עבור כל k_2, \dots, k_m שלמים,

$$n = (b_1 - k_2 t_2 - \dots - k_m t_m) t_1 + (b_2 + k_2 t_1) t_2 + \dots + (b_m + k_m t_1) t_m$$

בצורה זו נוכל לבחור את k_2, \dots, k_m כך שמתקיים

$$n = c_1 t_1 + \dots + c_m t_m$$

וכן $0 \leq c_2, \dots, c_m \leq t_1 - 1$. מכאן,

$$\begin{aligned} n &\leq c_1 t_1 + (t_1 - 1)(t_2 + \dots + t_m) \\ c_1 t_1 &\geq n - (t_1 - 1)(t_2 + \dots + t_m) \end{aligned}$$

נבחר $n_0 = (t_1 - 1)(t_2 + \dots + t_m)$. כעת לכל $n \geq n_0$, אגף ימין אי שלילי, וכן t_1 טבעי, לכן c_1 אי שלילי. בסך הכל קיבלנו ייצוג כדרוש. ■

בעזרת למה זו נוכל להוכיח את למת המפתח: **הוכחה:** לכל $x \in S$, $\gcd(T(x)) = 1$, לכן, מהלמה מתורת המספרים, קיים $n_{0,x}$ כך שכל $n \geq n_{0,x}$ מקיים $n \in T(x)$ (שכן אם $t_1, t_2 \in T(x)$ אזי $t_1 + t_2 \in T(x)$). כעת, נגדיר

$$n_0 = \max_{x \in S} n_{0,x}$$

כעת, לכל $n \geq n_0$ ולכל $x \in S$, $n \in T(x)$. כעת, מאי פריקות, לכל $x, y \in S$ קיים $t_{x,y} \geq 1$ כך שמתקיים $\mathbb{P}(X_{t_{x,y}} = y) > 0$. נגדיר

$$\bar{t} = \max_{x,y \in S} t_{x,y}$$

וכעת נגדיר $r = \bar{t} + n_0$. כעת, לכל $x, y \in S$, נגיע מהמצב x אל המצב y תוך $t_{x,y}$ צעדים. מתקיים $t_{x,y} \leq \bar{t}$. כעת, נרצה "לבזבז" $r - t_{x,y}$ צעדים, ולהישאר במצב y . מתקיים $r - t_{x,y} \geq r - \bar{t} = n_0$, ולכן ניתן להגיע מהמצב x למצב y בהסתברות חיובית. ■

כעת אנחנו מוכנים ומזומנים להוכיח את המשפט הארגודי. **הוכחה:** נחשוב על שרשרת המרקוב שנועה r צעדים של השרשרת המקורית בכל צעד.

טענה 0.4 נגדיר מטריצת הסתברות מעבר $E(x, y) = \pi(y)$ לכל $x, y \in S$.

1. לכל מטריצת הסתברות מעבר Q מתקיים $Q \cdot E = E$.

2. לכל מטריצת הסתברות מעבר Q כך שההתפלגות π היא התפלגות סטציונרית שלה, $E \cdot Q = E$.

הוכחה: נוכיח על ידי חישוב.

1.

$$(Q \cdot E)_{x,y} = \sum_{z \in S} Q(x, z) E(z, y) = \sum_{z \in S} Q(x, z) \pi(y) = \pi(y) \sum_{z \in S} Q(x, z) = \pi(y)$$

2. נקבע $x \in S$. לפי הגדרה, השורה x במטריצה $E \cdot Q$ היא מכפלת השורה x של המטריצה E במטריצה Q . כלומר, השורה הזו היא $\pi \cdot Q$, ומהגדרת התפלגות סטציונרית נקבל $\pi \cdot Q = \pi$, וקיבלנו את הנדרש.

■

כעת, לפי למת המפתח, נקבל r שמקיים לכל $x, y \in S$

$$P^r(x, y) = \mathbb{P}_x(X_r = y) > 0$$

לכן, קיים $0 < \delta < 1$ כך שלכל x, y מתקיים

$$P^r(x, y) \geq \delta \pi(y)$$

במילים אחרות, כל איברי המטריצה $P^r - \delta \cdot E$ הם אי שליליים.

$$P^r = \delta \cdot E + (1 - \delta) R$$

כך נגדיר את R . נקבל כי R מטריצת הסתברויות מעבר. ראינו שכל איבריה אי שליליים, וכן לכל $x \in S$ מתקיים

$$\sum_{y \in S} R(x, y) = \sum_{y \in S} \frac{P^r(x, y) - \delta E(x, y)}{1 - \delta} = \sum_{y \in S} \frac{1 - \delta}{1 - \delta} = 1$$

טענה 0.5 לכל $k \geq 1$, מתקיים

$$P^{k \cdot r} = \left(1 - (1 - \delta)^k\right) E + (1 - \delta)^k R^k$$

הוכחה: עבור $k = 1$, זוהי הגדרת R . נמשיך באינדוקציה.

$$\begin{aligned}
 P^{kr} &= P^{(k-1)r} \cdot P^r = \left(\left(1 - (1 - \delta)^{k-1}\right) E + (1 - \delta)^{k-1} R^{k-1} \right) \cdot P^r = \\
 &= \left(1 - (1 - \delta)^{k-1}\right) E + (1 - \delta)^{k-1} R^{k-1} (\delta E + (1 - \delta) R) = \\
 &= \left(1 - (1 - \delta)^{k-1}\right) E + \delta (1 - \delta)^{k-1} E + (1 - \delta)^k R^k = \\
 &= \left(1 - (1 - \delta)^{k-1} + \delta (1 - \delta)^{k-1}\right) E + (1 - \delta)^k R^k = \\
 &= \left(1 - (1 - \delta)^{k-1} (1 - \delta)\right) E + (1 - \delta)^k R^k \\
 &= \left(1 - (1 - \delta)^k\right) E + (1 - \delta)^k R^k
 \end{aligned}$$

■

לסיום, יהי $t \geq 1$ שלם, ונרשום $t = k \cdot r + s$, $0 \leq s \leq r$. אזי

$$\begin{aligned}
 P^t &= P^{kr+s} = P^{kr} \cdot P^s = \left(\left(1 - (1 - \delta)^k\right) E + (1 - \delta)^k R^k \right) P^s = \\
 &= \left(1 - (1 - \delta)^k\right) E + (1 - \delta)^k R^k P^s
 \end{aligned}$$

נשים לב כי מכאן,

$$P^t - E = (1 - \delta)^k (R^k P^s - E)$$

לכן, לכל $x, y \in S$ נקבל

$$\begin{aligned}
 |\mathbb{P}_x(X_t = y) - \pi(t)| &= |P^t(x, t) - E(x, y)| = (1 - \delta)^k |(R^k \cdot P^s)(x, y) - E(x, y)| \leq \\
 &\leq (1 - \delta)^k \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

■