

מבוא להסתברות

© ארזים

27 במרץ 2016

סוף הדוגמה מהשיעור שעבר:
מראים שכאשר

$$p = \frac{(1 - \varepsilon) \log n}{n}$$

עם $\varepsilon > 0$, ההסתברות לילד ללא חברים שואפת לאחד. חישבנו בשיעור שעבר שההסתברות למשלים של המאורע הזה היא

$$(1 - (1 - p)^n)^n$$

ניזכר בלמה שהייתה לנו מחדוא, ונקבל שמתקיים

$$(1 - p)^n \geq e^{-p-2p^2}$$

ולכן

$$(1 - (1 - p)^n)^n \leq \left(1 - e^{-n(p+2p^2)}\right)^n \leq e^{-ne^{-n(p+2p^2)}}$$

נותר רק לבדוק לאן השאיפה כעת. נציב את p ונקבל

$$\begin{aligned} n(p + 2p^2) &= n \left(\frac{(1 - \varepsilon) \log n}{n} + 2 \frac{(1 - \varepsilon)^2 \log^2 n}{n^2} \right) = (1 - \varepsilon) \log n + 2 \frac{(1 - \varepsilon)^2 \log^2 n}{n} = \\ &= (1 - \varepsilon) \log n + a_n \end{aligned}$$

נמשיך להציב:

$$ne^{-n(p+2p^2)} = ne^{-(1-\varepsilon) \log n - a_n} = n \cdot \frac{1}{n^{1-\varepsilon}} \cdot e^{-a_n} = n^\varepsilon \cdot e^{-a_n}$$

לכן בסה"כ ההסתברות שלנו היא

$$(1 - (1 - p)^n)^n \leq e^{-n^\varepsilon e^{-a_n}}$$

כעת, כיוון שמתקיים

$$a_n = \frac{2(1-\varepsilon)^2 \log^2 n}{n} \leq 1$$

עבור n גדול מספיק, מתקיים

$$e^{-n^\varepsilon \cdot e^{-a_n}} \leq e^{-n^\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon}} \rightarrow 0$$

אי־תלות מותנה: יהיו A, B, C מאורעות כך שמתקיים $\mathbb{P}(C) > 0$. ניתן לשאול האם A, B בלתי תלויים במרחב המותנה במאורע C , כלומר

$$\mathbb{P}(A \cap B | C) = \mathbb{P}(A | C) \cdot \mathbb{P}(B | C)$$

אין גרירה מאי־תלות כזאת לאי־תלות במרחב המקורי, וגם לא בכיוון ההפוך. נראה דוגמה לכך שאי־תלות בזוגות לא גוררת אי־תלות: נטיל מטבע הוגן פעמיים ונגדיר את המאורעות הבאים - A הוא עץ בהטלה הראשונה, B הוא עץ בהטלה השנייה, C הוא בדיוק עץ אחד. ניתן לראו תשכל זוג בלתי־תלויים, אבל השלושה יחד אינם בלתי־תלויים. נראה גם הסבר לכך, בלי בנייה, באמצעות אלגברה לינארית: אי־תלות של A, B, C דורשת:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \end{aligned}$$

נבחר שרירותית $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(C) = \frac{1}{5}$. כעת אגפי ימין נקבעו לנו. נראה קיום דוגמה שמקיימת את השוויונות הראשון, השני והרביעי, אך לא את השלישי, באמצעות אלגברה לינארית. ניקח את מרחב המדגם

$$\Omega = \{0, 1\}^3$$

כאשר המאורעות הם A - 1 בקואורדינטה הראשונה, B - 1 בקואורדינטה השנייה, C - 1 בקואורדינטה השלישית. צריך עוד לבחור את פונקציית ההסתברות. לפי הנתונים, נצטרך

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \frac{1}{2} = \mathbb{P}((1, 0, 0)) + \mathbb{P}((1, 0, 1)) + \mathbb{P}((1, 1, 0)) + \mathbb{P}((1, 1, 1)) \\ \mathbb{P}(B) &= \frac{1}{3} = \mathbb{P}((0, 1, 0)) + \mathbb{P}((0, 1, 1)) + \mathbb{P}((1, 1, 0)) + \mathbb{P}((1, 1, 1)) \\ \mathbb{P}(C) &= \frac{1}{5} = \dots \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{1}{6} = \mathbb{P}((1, 1, 0)) + \mathbb{P}((1, 1, 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap C) &= \frac{1}{10} = \dots \\ \mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \frac{1}{30} = \mathbb{P}((1, 1, 1)) \\ 1 &= \mathbb{P}((0, 0, 0)) + \dots + \mathbb{P}((1, 1, 1))\end{aligned}$$

כיוון שיש לנו 7 משוואות עם 8 נעלמים, או שאין פתרון או שהפתרון הכללי הוא מהצורה

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + t \cdot \vec{q}$$

כאשר \vec{q} הוא פתרון למערכות ההמוגונית. יש פתרון, שכן ניתן לקחת את מרחב המכפלה שבו A, B, C בלתי-תלויים לחלוטין, והוא פתרון. נבחר את \vec{p}_0 להיות פתרון זה. בפתרון זה כל ההסתברויות הן בין אפס לבין אחד. על ידי לקיחת t חיובי ומאוד מאוד קטן, נקבל פתרון נוסף מהצורה שבו כל הקואורדינטות חיוביות, הוא מקיים את 7 המשוואות, והוא לא הפתרון הבלתי-תלוי לחלוטין.

1 משתנים מקריים

דוגמא: הטלת קוביה הוגנת פעמיים.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\} \\ \mathbb{P}(\omega) &= \frac{1}{36} \quad \forall \omega \in \Omega\end{aligned}$$

משתנה מקרי הוא כמות מקרית בניסוי. למשל בדוגמא שלנו, סכום התוצאות בשתי ההטלות הוא משתנה מקרי.

הגדרה 1.1 משתנה מקרי X הוא פונקציה $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (או לקבוצה יותר כללית). בדוגמא שלנו,

$$\begin{aligned}X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ X(i, j) &= i + j\end{aligned}$$