

## מבוא להסתברות

© ארזים

15 במאי 2016

### 1 מקדם מתאם

יהיו צמד משתנים  $X, Y$  על  $(\Omega, \mathbb{P})$ . נניח כי לשניהם שונות סופית.

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}}$$

#### 1.1 תכונות

1.

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

2.  $\rho(X, Y) = 1 \iff Y = aX + b, a > 0, b$  ממשיים.

3.  $\rho(X, Y) = -1 \iff Y = aX + b, a < 0, b$  ממשיים.

**תרגיל** בקערה 10 אגסים, 10 תפוחים, 10 בננות. מוציאים באקראי 10 פירות ללא החזרה.  $X$  - מספר התפוחים שהוצאו,  $Y$  - מספר הבננות שהוצאו. מצאו את  $\rho(X, Y)$ .

**פתרון** נניח כי  $Z$  הוא מספר האגסים שהוצאו. אזי  $X + Y + Z = 10$ . כעת מתקיים  $X \sim Y \sim Z \sim \text{HG}(30, 10, 10)$ . לכן,  $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \text{Var}(Z)$ . בנוסף,  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(10 - Z) = \text{Var}(Z)$  לכן  $X + Y = 10 - Z$ .

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}$$

נזכר כי  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Var}(X + Y) - \text{Var}(X) - \text{Var}(Y)$ , כלומר  $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{2}\text{Var}(X)$  ובפרט במקרה שלנו  $\frac{1}{2}(\text{Var}(X + Y) - \text{Var}(X) - \text{Var}(Y))$  כלומר

$$\rho(X, Y) = -\frac{\text{Var}(X)}{2\text{Var}(X)} = -\frac{1}{2}$$

**תרגיל** יש 100 כדורים בכד, ממוספרים 1 עד 100. מוציאים ללא החזרה 10 כדורים.  $X_i$  - הערך של הכדור  $i$  שהוצאנו. חשבו  $\text{Cov}(X_i, X_j)$  עבור  $i \neq j$ .

**פתרון** נמשיך את הניסוי ונוציא את כל יתר הכדורים, אחד אחרי השני, עד שהוצאנו את כל הכדורים ללא החזרה.  $X_i$  הערך שעל כדור  $i$  שהוצאנו.

$$\sum_{i=1}^{100} X_i = \sum_{i=1}^{100} i = 5050$$

לכן

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = 0 = \sum_{i=1}^{100} \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

משיקולי סימטריה,  $X_i \sim X_j$  לכל  $i \neq j$ . בפרט  $X_i \sim U[1, 100]$ : שונות של משתנה שמתפלג  $U[a, b]$  היא  $\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$  (בחוברת), לכן

$$\text{Var}(X_i) = \frac{(100-1+1)^2-1}{12} = \frac{9999}{12}$$

לכן,

$$0 = 100 \cdot \frac{9999}{12} + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

משיקולי סימטריה שוב,  $\text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Cov}(X_1, X_m)$  ולכן

$$\begin{aligned} 0 &= 100 \cdot \frac{9999}{12} + 100 \cdot 99 \cdot \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_1, X_2) &= -\frac{9999}{12 \cdot 99} = -\frac{101}{12} \end{aligned}$$

## 2 תוחלת מותנה ושונות מותנה

### 2.1 התנייה על מאורע

**הגדרה 2.1** יהי  $X$  משתנה מקרי במרחב  $(\Omega, \mathbb{P})$ . יהי מאורע  $A$  במרחב כך שמתקיים  $\mathbb{P}(A) > 0$ . נגדיר את התוחלת של  $X$  במרחב המותנה במאורע  $A$ :

$$\mathbb{E}(X | A) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega | A)$$

## טענה 2.2 שקול להגדרה

$$\sum_k k \cdot \mathbb{P}(X = k | A)$$

**הגדרה 2.3** השונות של  $X$  בהינתן  $A$ :

$$\text{Var}(X | A) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X | A))^2 | A\right) = \mathbb{E}\left((X | A)^2\right) - (\mathbb{E}(X | A))^2$$

כל הטענות שראינו עבור תוחלת ושונות תקפות גם עבור תוחלת ושונות בהתנייה על מאורע.

**טענה 2.4** אם  $\mathbb{E}(X)$  סופית אז  $\mathbb{E}(X | A)$  סופית (בהנחה שההסתברות של  $A$  חיובית).

ההוכחה מתבססת על תרגיל בית, בו מראים כי  $\mathbb{E}(X | A) = \frac{\mathbb{E}(X \cdot 1_A)}{\mathbb{P}(A)}$ .

## 2.2 התנייה על משתנה מקרי

**הגדרה 2.5** יהיו משתנים מקריים  $X, Y$  על מרחב הסתברות  $(\Omega, \mathbb{P})$ . נגדיר את המשתנה המקרי  $\mathbb{E}(X | Y)$  להיות

$$\mathbb{E}(X | Y)(\omega) := \mathbb{E}(X | Y = Y(\omega))$$

**משפט 2.6** (משפט התוחלת השלמה) יהיו  $X, Y$  משתנים מקריים על אותו המרחב, בעלי תוחלת סופית. אזי

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | Y))$$

**הוכחה:** באופן מפורש:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | Y)) &= \sum_{y \in \text{Supp}(Y)} \mathbb{E}(X | Y = y) \cdot \mathbb{P}(Y = y) = \\ &= \sum_{y \in \text{Supp}(Y)} \left( \sum_{x \in \text{Supp}(X)} x \cdot \mathbb{P}(X = x | Y = y) \right) \cdot \mathbb{P}(Y = y) = \\ &= \sum_y \left( \sum_x x \cdot \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \cdot \mathbb{P}(Y = y) \right) = \sum_x x \cdot \left( \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y) \right) = \\ &= \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

■

**תרגיל** אלון הוא כורה פחם הנמצא במערה עם שלושה פתחים. אם יבחר נכון, הוא ייצא תוך שבע שעות, אחרת יחזור לנקודת ההתחלה תוך 3 או 5 שעות, בהתאם לפתח שבחר. בכל שלב הוא בוחר באופן בלתי תלוי ובאקראי פתח.  $X$  - הזמן שייקח לו לצאת. מצאו את  $\mathbb{E}(X)$ .

**פתרון** נגדיר משתנה מקרי  $Y$  להיות הבחירה הראשונה של אלון:

$$Y \sim \begin{cases} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 9 & \frac{1}{3} \end{cases}$$

כאשר 1 הדלת של שבע שעות, 0 הדלת של 3 שעות, 9 הדלת של 5 שעות. כעת

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | Y)) = \mathbb{E}(X | Y = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{E}(X | Y = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + \\ &+ \mathbb{E}(X | Y = 9) \cdot \mathbb{P}(Y = 9) = \frac{1}{3} (7 + 3 + \mathbb{E}(X) + 5 + \mathbb{E}(X)) \\ 3\mathbb{E}(X) &= 15 + 2\mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) &= 15 \end{aligned}$$

**תרגיל** מטילים מטבע הוגן עד קבלת  $H$  לראשונה.  $N$  - מספר ההטלות. מכינים מטבע חדש.  $\frac{1}{N}$  עבור  $H$  ומטילים אותו  $N$  פעמים.  $R$  - מספר  $H$  בהטלות המטבע החדש.

1. האם  $N, R$  תלויים?

2. חשבו את תוחלת  $R$ .

**פתרון**

1. תלויים, שכן

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R | N = 1) &= 1 \\ \mathbb{P}(R | N = 2) &\sim \text{Bin}\left(2, \frac{1}{2}\right) \\ \mathbb{P}(R = 2 | N = 2) &\neq \mathbb{P}(R = 2 | N = 1) \end{aligned}$$

2. לכל  $n$  טבעי מתקיים

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R | N = n) &\sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{n}\right) \\ \mathbb{E}(R | N = n) &= n \cdot \frac{1}{n} = 1 \\ \mathbb{E}(R) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(R | N)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(R | N = n) \cdot \mathbb{P}(N = n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) = 1 \end{aligned}$$