

## מבוא להסתברות

© ארזים

5 ביוני 2016

### 1 שרשרת אי פריקה

לכל צמד מצבים, ניתן להגיע בזמן סופי בהסתברות חיובית ממצב אחד לאחר. הגדרות שקולות:

$$\begin{aligned}\forall x, y \in S \exists t \in \mathbb{N}^+ \mid \mathbb{P}_x(X_t = y) > 0 \\ \forall x, y \in S \exists t \in \mathbb{N}^+ \mid P^t(x, y) > 0\end{aligned}$$

### 2 מחזור של שרשרת

לכל  $x \in S$ , נגדיר את הקבוצה  $T(x) = \{t \geq 1 \mid \mathbb{P}_x(X_t = x) > 0\}$  וכן נגדיר את המחזור של  $x$  להיות  $\gcd(T(x))$ .  
בשרשרת אי פריקה, לכל המצבים יש את אותו המחזור, וזה נקרא המחזור של השרשרת. אם המחזור הוא 1 השרשרת נקראת חסרת מחזור.

### 3 משפטי התכנסות

**משפט 3.1** תהי שרשרת מרקוב אי פריקה עם התפלגות סטציונרית  $\pi$ . אזי לכל התפלגות התחלתית  $\mu$  ולכל מצב  $y$  מתקיים

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \mathbb{P}_\mu(X_s = y) = \pi(y)$$

**משפט 3.2** נתונה שרשרת מרקוב אי פריקה וחסרת מחזור עם התפלגות סטציונרית  $\pi$ . אזי קיימים  $c > 0$  וכן  $0 < \alpha < 1$  כך שלכל התפלגות התחלתית  $\mu$  ולכל מצב  $x$  מתקיים

$$|\mathbb{P}_\mu(X_t = x) - \pi(x)| < c \cdot \alpha^t$$

למעשה

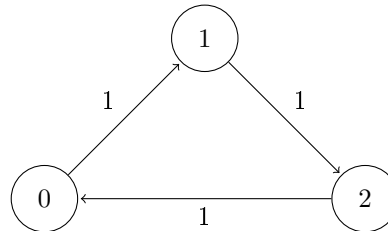
$$\mathbb{P}_\mu(X_t = x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \pi(x)$$

**תרגיל** תהי קבוצת מצבים  $S = \{0, 1, 2\}$  ומטריצת מעבר

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מצאו התפלגות סטציונרית  $\pi$  וקבעו האם  $\mu_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \pi$  לכל התפלגות התחלתית  $\mu$ .

**פתרון** נתחיל בתיאור השרשרת בצורה גרפית:



מסימטריה בין המצבים (או מכך שהמטריצה דו סטוכסטית) נקבל שההתפלגות הסטציונרית היא  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . ניתן גם לחשב ישירות:

$$\begin{aligned} (a, b, 1 - a - b)P &= (a, b, 1 - a - b) \\ 1 - a - b &= a \\ a &= b \\ b &= 1 - a - b \\ a &= b = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

אין התכנסות משום שהשרשרת בעלת מחזור 3. ניקח לדוגמה  $\mu = (1, 0, 0)$ , ונקבל כי

$$\mathbb{P}_\mu(X_t = 0) = \begin{cases} 1 & t \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 & t \not\equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

**תרגיל** אלון - מטבע אדום - עץ בסיכוי  $p$ . בן - מטבע כחול - עץ בסיכוי  $q$ . בכל שלב, מטילים כל אחד את המטבע. אם יוצא פעמיים עץ, מתחלפים, ואחרת מתחילים מהתחלה.  $A_n$  - אחרי  $n$  שלבים, בן עם מטבע כחול. מצאו עבור אילו  $p, q$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$  קיים וחשבו אותו.

**פתרון** יש 2 מצבים: לבן יש מטבע כחול, ולבן יש מטבע אדום.

$$P = \begin{pmatrix} 1 - pq & pq \\ pq & 1 - pq \end{pmatrix}$$

מדור־סטוכסטיות נקבל כי  $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

אם  $pq > 0$  השרשרת לא פריקה. אם  $pq = 0$  אזי היא פריקה, ויש התכנסות, כי נשארים לנצח במצב ההתחלתי.  
 אם  $pq < 1$  השרשרת חסרת מחזור. בסך הכל, אם  $0 < pq < 1$  השרשרת אי פריקה וחסרת מחזור, ולכן יש התכנסות אל  $\pi$ .

**תרגיל** יהי גרף  $G = (V, E)$  ונניח שמבצעים בו הילוך מקרי פשוט. כלומר, אם נמצאים בשלב  $t$  בקודקוד  $x$ , אזי בהסתברות  $\frac{1}{\deg(x)}$  עוברים לקודקוד  $y$  אם  $(x, y) \in E$  קשת.

1. הגדירו שרשרת מרקוב להילוך הזה.
2. הוכיחו שהשרשרת אי פריקה אם ורק אם הגרף קשיר.
3. הניחו כי  $G$  קשיר. הראו כי השרשרת בעלת מחזור 2 אם ורק אם הגרף דו צדדי. אחרת, המחזור הוא 1.
4. הניחו כי  $G$  קשיר. הוכיח כי  $\pi(x) = \frac{\deg(x)}{2|E|}$ .

### פתרון

1. נגדיר  $S = V$ , וכן

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)} & (x, y) \in E \\ 0 & (x, y) \notin E \end{cases}$$

אכן,

$$\sum_{y \in V} P(x, y) = \sum_{\substack{y \in V \\ (x, y) \in E}} \frac{1}{\deg(x)} = 1$$

2. ההוכחה המלאה בעמוד 126 בחוברת.  
 ההוכחה היא באינדוקציה. מראים שאם קיים מסלול באורך  $t$  שמתחיל בקודקוד  $x$  ומסתיים בקודקוד  $y$ , אזי  $P^t(x, y) > 0$ , ולהיפך. האינדוקציה היא על  $t$ .  
 בסיס האינדוקציה: נרצה להוכיח כי  $P(x, y) > 0$  אם ורק אם יש מסלול באורך 1 שמתחיל בקודקוד  $x$  ומסתיים בקודקוד  $y$ , כלומר  $(x, y) \in E$ , כלומר  $P(x, y) = \frac{1}{\deg(x)} > 0$ .  
 נניח את הטענה עבור  $t = n$ , ונוכיח עבור  $t = n + 1$ . נניח כי יש מסלול באורך  $n + 1$  שתחיל בקודקוד  $x$  ומסתיים בקודקוד  $y$ . אזי קיים קודקוד  $z$  כך שיש מסלול באורך  $n$  שמתחיל בקודקוד  $x$  ומסתיים בקודקוד  $z$ , וכן  $(y, z) \in E$ . מהנחת האינדוקציה,  $P^n(x, z) > 0$  וכן  $P(z, y) = \frac{1}{\deg(z)} > 0$ , ולכן  $P^{n+1}(x, y) \geq P^n(x, z) \cdot P(z, y) > 0$ . הכיוון השני מאוד דומה - מניחים שהקואורדינטה חיובית, ומוצאים הילוך באורך  $n + 1$  שמתחיל בקודקוד  $x$  ומסתיים בקודקוד  $y$ .
3. גרף דו צדדי הוא גרף שניתן לצבוע את כל קודקודיו בשני צבעים כך שאין קשת שמחברת שני קודקודים באותו צבע. טענה מתורת הגרפים: טענה מתורת הגרפים: גרף הוא דו צדדי אם ורק אם כל מעגל בו הוא מאורך זוגי. מכאן נובע כי המחלק המשותף המקסימלי הוא 2 - משום שתמיד יש מעגל באורך 2 (לצאת ולחזור). אם הגרף לא דו צדדי, יש גם מעגל באורך אי זוגי, וכעת המחזור הוא  $\gcd(2, k)$ , כאשר  $k$  אי זוגי, ולכן מתקבל 1.

4. ראינו בכיתה.

**תרגיל** אריק ובנץ 3 כובעים. הכובעים בצבע לבן, שחור ואדום. אריק מתחיל עם כובע לבן, ובנץ עם השחור. הכל יום בוחרים באקראי את, והוא מחליף את הכובע שלו עם הכובע שמותר בחוץ.  $X_n$  - מספר הפעמים שאריק לבש את הכובע השחור בתוך  $n$  השלבים הראשונים.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{n} = ?$$

**פתרון** נגדיר  $S = \{WB, WR, BR, BW, RW, RB\}$ , כאשר הקואורדינטה הראשונה היא של אריק והשנייה של בנץ. כמו כן

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל כי  $\pi = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ . לא נקבל התכנסות, אבל השאלה מדברת על שכיחות, ואנחנו יודעים שמספיקה אי פריקות להתכנסות השכיחות בכל מצב להתפלגות הסטציונרית. השכיחות שאריק עם כובע שחור היא סכום השכיחות במצבים  $BR, BW$  ושכיחות זו היא  $\frac{1}{6}$ , לכן נקבל  $\frac{1}{3}$ .

נמשיך לסעיפים הבאים. האם ההסתברות של  $BR$  מתכנסת? לא! השרשרת מחזורית ואין התכנסות.

כעת נכניס עדכון לשרשרת - אם הכובע האדום הוא זה שבצד, אז בסיכוי שליש יחליפו ביניהם כובעים, ובסיכוי שני שליש - כמו קודם. כעת,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

השאלה - חשבו את ההסתברות שבנץ לובש את הכובע השחור ביום  $n$  כאשר  $n \rightarrow \infty$ . חשבו אותו דבר עבור הכובע האדום. ההתפלגות הסטציונרית

$$\pi = \left( \frac{3}{14}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{14}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7} \right)$$

כעת, אם מסתכלים על זמנים זוגיים יש שרשרת על  $\{WB, RW, BR\}$ . שרשרת זו לא מחזורית ואי פריקה. ההתפלגות הסטציונרית עדיין תלוייה בדרגות והיא

$$\pi = \left( \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7} \right)$$

עושים בדומה לאי-זוגיים ומקבלים תוצאה שונה עבור המצב עם הכובע השחור, לכן אין התכנסות.  
בסעיף ד מוצאים שבזוגיים ובאי-זוגיים יש אותה תוצאה, לכן יש התכנסות.