

מבוא להסתברות

© ארזים

3 באפריל 2016

1 משתנים מקריים

משתנה מקרי X זו פונקציה שמוגדרת על מרחב הסתברות כלשהו, כך שלכל $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ הוא ערך בקבוצה S , בדרך כלל $S = \mathbb{R}$.
לכל משתנה מקרי X יש התפלגות.
התפלגות היא פונקציה, מסומנת μ או p , שמתארת את ההסתברות של X לקבל ערכים שונים בקבוצה S . פורמלית, $\mu: S \rightarrow [0, 1]$, כך שמתקיים

$$\sum_{k \in S} \mu(k) = 1$$
$$\mu(k) := \mathbb{P}(X = k)$$

הכתיבה $\{X = k\}$ היא קיצור לכתיבה $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$.
דוגמא: יהי (Ω, \mathbb{P}) מרחב הסתברות, ויהי $A \subseteq \Omega$ מאורע. האינדיקטור של A הוא המשתנה המקרי:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

תרגיל: נטיל 2 קוביות הוגנות. X - התוצאה המקסימלית. מה התפלגות X ?
פתרון: בשאלות כאלה, נתחיל תמיד ביחוי התומך של ההתפלגות - התומך של X .
כלומר, נציין אילו ערכים מתקבלים בהסתברות חיובית.
במקרה זה, $\text{Supp}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$\mu(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{36}$$
$$\mu(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{36}$$

באופן כללי,

$$\forall 1 \leq k \leq 6 \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1) = \frac{k^2}{6^2} - \frac{(k-1)^2}{6^2} = \frac{2k-1}{36}$$

כלל אצבע: פונקציות מקסימום ננסה להציג בצורה $x \leq k$, פונקציות מינימום ננסה להציג בצורה $x \geq k$.
 נניח שהיינו מגדירים $-Y$ התוצאה המינימלית.

$$\forall 1 \leq k \leq 6 \quad \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \geq k) - \mathbb{P}(Y \geq k + 1) = \frac{(7-k)^2}{6^2} - \frac{(6-k)^2}{6^2} = \frac{13-2k}{36}$$

1.1 התפלגויות מוכרות

1.1.1 התפלגות ברנולי - $\text{Ber}(p), 0 \leq p \leq 1$

למשל, הטלת מטבע עם סיכוי p לעץ.

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} p & k = 1 \\ 1 - p & k = 0 \end{cases}$$

התומך - $\{0, 1\}$.

1.1.2 התפלגות אחידה - $U[1, N]$

זוהי התפלגות שמתייחסת למשתנה מקרי שמקבל ערכים בין 1 ובין N , כל ערך בהסתברות שווה.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{N}$$

התומך - $\{1, \dots, N\}$

1.1.3 התפלגות בינומית - $\text{Bin}(n, p), 1 \leq n \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 1$

מבצעים סדרה של n ניסויי ברנולי בלתי תלויים, למשל n הטלות מטבע עם סיכוי p להצלחה (לקבל 1). X - סופר את מספר ההצלחות הכולל.
 התומך - $\{0, \dots, n\}$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

1.1.4 התפלגות גיאומטרית - $G(p), 0 \leq p \leq 1$

מבצעים סדרה של ניסויי ברנולי (לדוגמא - הטלת מטבע). X סופר את מספר הניסויים עד ההצלחה הראשונה.
 התומך - $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

1.1.5 התפלגות בינומית שלילית - $NB(r, p), r \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 1$

מבצעים סדרה של ניסויי ברנולי. X סופר כמה ניסויים נעשו עד שהושגו r הצלחות. התומך - $\{r, r + 1, \dots\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{k-r}$$

ניתן להציג זאת כסכום של גיאומטריים.

1.1.6 התפלגות היפר-גיאומטרית - $HG(N, D, n)$

ישנם N אובייקטים, מתוכם D מיוחדים, ודוגמים ללא החזרה n מתוך N . X סופר את מספר המיוחדים במדגם.

$$\mathbb{P}(x = k) = \frac{\binom{D}{k} \cdot \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

תרגיל: בכד יש 9 כדורים לבנים וכדור אחד שחור. מושכים באקראי, בזה אחר זה, כדורים מן הכד.

X - כמות ההוצאות עד הוצאת כדור שחור.

Y - מספר הוצאות עד הוצאת שלושה כדורים שחורים.

1. מה התפלגות X כאשר יש החזרה?
2. מה התפלגות X כאשר אין החזרה?
3. מה התפלגות Y כאשר יש החזרה?

פתרון: לפי סעיפים:

1. $X \sim G\left(\frac{1}{10}\right)$, שכן X סופר מספר ניסויים (כל הוצאת כדור היא ניסוי) עד הצלחה ראשונה (כאשר הצלחה היא הוצאת כדור שחור).

2. התומך - $\{1, 2, \dots, 10\}$, השלמים בין 1 לבין 10. $X \sim U[1, 10]$ - הסיכוי של הכדור השחור להישלף בהוצאה מספר k זהה לסיכוי להישלף בהוצאה מספר $k+1$ וכן הלאה. באופן כללי, בכל פעם שיש הוצאה ללא החזרה, כדאי לעשות אנלוגיה לסידורים בשורה. בסידור עשרת הכדורים בשורה, השחור יכול ליפול בכל מקום בהסתברות שווה. לכן ההתפלגות אחידה.

3. $X \sim NB\left(3, \frac{1}{10}\right)$ - ניסוי הוא הוצאת כדור, הצלחה היא הוצאת כדור שחור, וכעת Y סופר ניסויים שנעשים עד 3 הצלחות.

תרגיל: שיכור הולך בכל שלב ימינה צעד אחד בהסתברות p , ושמאלה צעד אחד בהסתברות $1-p$. ישנם בסך הכל N צעדים.
 X - מיקום השיכור אחרי N צעדים.
 Z - מספר הצעדים ימינה.

מצאו את התפלגויות X, Z .
פתרון: ההתפלגות של Z היא בינומית: $Z \sim \text{Bin}(N, p)$. כל צעד הוא ניסוי, והצלחה היא צעד ימינה - מתרחש בסיכוי p . סופר את הצלחות.
 כעת, $X = Z - (N - Z)$ - המיקום הסופי הוא כמות הצעדים ימינה, פחות כמות הצעדים שמאלה. כלומר,

$$X = 2Z - N$$

לכן יתקיים

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(2Z - N = k) = \mathbb{P}\left(Z = \frac{k + N}{2}\right) = \binom{N}{\frac{k+N}{2}} \cdot p^{\frac{k+N}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{N-k}{2}}$$

כאשר $k + N$ זוגי, $-N \leq k \leq N$ שלם.
תרגיל: לבן 5 מטבעות הוגנים ובלתי תלויים. הוא מטיל את המטבעות. אם בחלקם יצא פלי, הוא מסלק אותם ומטיל את היתר. הוא ממשיך בתהליך שוב ושוב.
 מה הסיכוי שבסבב ההטלות השני יקבל בדיוק 3 עצים?
פתרון: יש שתי דרכים - ארוכה וקצרה. נתחיל מהארוכה.
 Y_1 - מספר העצים בסיבוב הראשון.
 Y_2 - מספר העצים בסיבוב השני.
 $Y_1 \sim \text{Bin}(5, \frac{1}{2})$. אם נתון שמתקיים $Y_1 = k$, אזי

$$(Y_2 | Y_1 = k) \sim \text{Bin}\left(k, \frac{1}{2}\right)$$

נחפש

$$\mathbb{P}(Y_2 = 3) = \sum_{k=0}^5 \mathbb{P}(Y_2 = 3 | Y_1 = k) \cdot \mathbb{P}(Y_1 = k)$$

מציבים ערכים ומחשבים. עבור $k = 0, 1, 2$ נקבל $\mathbb{P}(Y_2 = 3 | Y_1 = k) = 0$. בסופו של דבר מגיעים לתשובה: $\frac{45}{512}$.
 הדרך הקצרה - הניסוי הוא הטלת כל מטבע. הצלחה היא התוצאה היא עץ בשני הסבבים. כעת,

$$Y_2 \sim \text{Bin}\left(5, \frac{1}{4}\right)$$