

# מבוא להסתברות

© ארזים

10 באפריל 2016

## 1 משתנים מקריים דו-מימדיים

עבור  $X, Y$  משתנים מקריים כלשהם נגדיר משתנה מקרי חדש  $(X, Y)$ , כאשר

$$(X, Y) : \Omega_X \times \Omega_Y \rightarrow \mathbb{R}^2$$

פונקציית ההסתברות של  $(X, Y)$  היא

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2) \in \Omega_X \times \Omega_Y : X(\omega_1) = k, Y(\omega_2) = l)$$

וזאת עבור כל  $k \in \text{supp}(X), l \in \text{supp}(Y)$ .  
**תרגיל:** מטילים צמד קוביות, לבנה ושחורה.  $X$  - תוצאת הקובייה הלבנה.  $Y$  - התוצאה המקסימלית מבין השתיים.  
 מצאו את ההתפלגויות השוליות של  $X, Y$  ואת ההתפלגות המשותפת שלהם.  
**פתרון:** בכדי להציג את ההתפלגות המשותפת ניתן להשתמש בטבלה או בנוסחה עבור כל הערכים שבתומך.

$X$ התפלגות	6	5	4	3	2	1	$Y/X$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	2
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	0	0	3
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	0	0	0	4
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$	0	0	0	0	5
$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{36}$	0	0	0	0	0	6
1	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	תפלגות $Y$

אם רוצים להציג את הפתרון בנוסחה:

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}_{X,Y}(k, l) = \begin{cases} \frac{k}{36} & 1 \leq k = l \leq 6 \\ \frac{1}{36} & 1 \leq k < l \leq 6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

עבור השוליות:  $X \sim U[1, 6]$ , עבור  $Y$  צריך לרשום מפורשות את  $\mathbb{P}(y = l)$  לכל  $l$ , או

$$Y \sim \begin{cases} \frac{2k-1}{36} & 1 \leq k \leq 6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

## 2 הילוך מקרי ועקרון השיקוף

יהי הילוך מקרי בעל  $n$  שלבים. נסמן  $S_n$  - המיקום הסופי של ההילוך,  $M_n$  - הערך המקסימלי אליו יגיע ההילוך.

**תרגיל:** מצאו את ההתפלגות המשותפת של  $(S_n, M_n)$ .  
**פתרון:** נרשום מפורשות את פונקציית ההתפלגות המשותפת. נבדוק מתי מתקיים

$$\mathbb{P}(M_n = m, S_n = s) = 0$$

זה קורה כאשר:

1.  $s > m$

2.  $s$  או  $m$  אינם שלמים

3.  $s, n$  בעלי זוגיות שונה

4.  $m < 0$

5.  $s > n$  או  $s < -n$

6.  $m > n$

נניח כי  $s, m$  אינם נכללים בתנאים אלה. נחשב את  $\mathbb{P}(M_n = m, S_n = s)$ .  
 נגדיר צמד מאורעות:

$$A = \{S_n = 2m - s\}$$

$$B = \{M_n \geq m, S_n = s\}$$

ונוכיח שהמאורעות שווי הסתברות בעזרת עיקרון השיקוף. נשים לב שמאורע  $A$  הוא בעל הסתברות ידועה (חישבנו בתרגול קודם). בעזרת המאורע  $B$  ניתן לחשב את  $\mathbb{P}(M_n = m, S_n = s)$  באופן הבא:

$$\mathbb{P}(M_n = m, S_n = s) = \mathbb{P}(M_n \geq m, S_n = s) - \mathbb{P}(M_n \geq m + 1, S_n = s)$$

המאורע השני מוכל בראשון, ובחיסור בין השניים מתקבלים כל ההילוכים שנגמרים בגובה  $s$  שבהם המקסימום הוא בדיוק  $m$ .  
 בעיקרון השיקוף, אנחנו בוחרים נקודה מסויימת בהילוך ומשקפים את כל הצעדים - עולים במקום לרדת, יורדים במקום לעלות. נבצע שיקוף החל מהנקודה הראשונה שבה הגענו לגובה  $m$ . לפני השיקוף, בין נקודה זו עד הסיום  $s$ , ירדנו  $m - s$  יחידות, ולכן, לאחר השיקוף, נקודת הסיום תהיה  $m - s$  צעדים מעל  $m$  - כלומר  $2m - s$ .

**טענה 2.1** ישנה העתקה חד-חד-ערכית ועל (השיקוף) בין ההילוכים מתוך  $A$  להילוכים מתוך  $B$ .

ראינו שהשיקוף החל מהנקודה הראשונה בה מגיעים לגובה  $m$  הופך הילוך מתוך  $B$  להילוך מתוך  $A$ . צריך להוכיח ששיקוף דומה של הילוך מתוך  $A$  מביא אותנו להילוך מתוך  $B$ .

$B$ . אם ניקח הילוך מתוך  $A$  ונשקף סביב הפעם הראשונה שההילוך מגיע לגובה  $m$  (אפשרי בוודאות כי נקודת הסיום בגובה  $2m - s$ , וכן  $s \leq m$ , לכן  $2m - s \geq m$ ), נקבל בחזרה הילוך שבמקום להוסיף  $m - s$  יחידות למעלה, מוריד  $m - s$  יחידות למטה - כלומר נסיים בגובה  $s = m - (m - s)$ . הגובה המקסימלי של הילוך זה הוא לפחות  $m$ , ונקודת הסיום היא  $s$ , ולכן ההילוך נמצא בתוך  $B$ .  
לכן בעצם הוכחנו שמתקיים

$$\begin{aligned} |A| &= |B| \\ \Downarrow \\ \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

נזכר כי מתקיים

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(S_n = 2m - s) = \frac{\binom{n}{\frac{n+2m-s}{2}}}{2^n}$$

ולכן מתקיים

$$\mathbb{P}(M_n = m, S_n = s) = \frac{\binom{n}{\frac{n+2m-s}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2(m+1)-s}{2}}}{2^n}$$

### 3 התפלגות מותנה ואי-תלות

#### 3.1 התפלגות מותנה

נניח ויש לנו צמד משתנים מקריים  $(X, Y)$ . ניתן להסתכל על המשתנה  $X$  כאשר  $Y = l$  נתון. בפועל, ההתפלגות של  $X | Y = l$  היא ההתפלגות המותנה של  $X$  בהינתן  $Y = l$ .

#### 3.2 אי-תלות של משתנים מקריים

משתנים מקריים  $X, Y$  הם בלתי-תלויים אם לכל  $k, l \in \mathbb{R}$  מתקיים

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}(Y = l)$$

בעמודים 60-61 בחוברת יש אוסף טענות מהשיעור בנוגע למשתנים מקריים בלתי-תלויים.

**תרגיל:** בן משחק בקוביות. הוא מטיל קוביה הוגנת שוב ושוב.

$X$  - מספר ההטלות עד שיוצא 6.

$Y$  - מספר ההטלות עד שיוצא 2 או 4.

מצאו את:

1. ההתפלגויות השוליות.

2. ההתפלגות של  $\min\{X, Y\}$

3. ההתפלגות המשותפת.

4. ההתפלגות של  $Y | X = 2$ .

**פתרון:**

1.  $X \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$  - כל הטלה היא ניסוי, מטילים עד הצלחה - כשיוצא 6, בהסתברות  $\frac{1}{6}$ .  
 $Y \sim G\left(\frac{1}{3}\right)$  - כל הטלה היא ניסוי, מטילים עד הצלחה - כשיוצא 2 או 4, בהסתברות  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

2.  $\min\{X, Y\}$  סופר את מספר ההטלות עד שיוצא 2,4 או 6 - הראשון מביניהם. שוב כל הטלה היא ניסוי ומטילים עד הצלחה - מספר זוגי כלשהו, בהסתברות  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ , ולכן  $\min\{X, Y\} \sim G\left(\frac{1}{2}\right)$ .

3. נחשב את ההסתברות  $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$ . עבור  $k = l$  או  $k \notin \mathbb{N}$  או  $l \notin \mathbb{N}$ , ההסתברות היא 0. אחרת,

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \begin{cases} \left(\frac{3}{6}\right)^{l-1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-l-1} \cdot \frac{1}{6} & k > l \\ \left(\frac{3}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{l-k-1} \cdot \frac{2}{6} & k < l \end{cases}$$

כאשר  $k > l$ , במקום  $l$  צריך לצאת 2 או 4, ולפניו יש  $l - 1$  בהן יוצא 1, 3, 5, ובמקום  $k$  יוצא 6. בין  $l$  לבין  $k$  יש  $k - l - 1$  הטלות שבהן יוצא כל דבר שאינו 6.  
 כאשר  $l < k$ , במקום  $k$  יוצא 6, ולפניו יש  $k - 1$  בהן יוצא 1, 3, 5, ובמקום  $l$  יוצא 2 או 4. בין  $k$  לבין  $l$  יש  $l - k - 1$  הטלות בהן יוצא 1, 3, 5, 6.

4. עבור  $Y | X = 2$ , מתקיים

$$\text{supp}(Y | X = 2) = \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}$$

כעת,

$$\mathbb{P}(Y = 1 | X = 2) = \frac{\mathbb{P}(Y = 1, X = 2)}{\mathbb{P}(X = 2)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{2}{5}$$

ולעומת זאת עבור  $l \geq 3$  שלם:

$$\mathbb{P}(Y = l | X = 2) = \frac{\mathbb{P}(Y = l, X = 2)}{\mathbb{P}(X = 2)} = \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{l-2-1} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{l-3}}{5}$$

**תרגיל:** מספר ביצי החופש שמטילה תרנגולת מאושרת מתפלג אחיד בין 1 לבין 4. מכל ביצה עתיד לבקוע אפרוח מאושר בהסתברות  $\frac{1}{3}$  באופן בלתי-תלוי ביתר הביצים או מספרן.

$X$  - מספר הביצים שהוטלו.

$Y$  - מספר האפרוחים.

1. מצאו את ההתפלגות המשותפת.

2. האם  $X, Y$  תלויים?

**פתרון:**

1. התומך של  $(X, Y)$  הוא

$$\text{supp}((X, Y)) = \{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq k, l \leq 4 \wedge l \leq k \wedge k \geq 1\}$$

נחשב בהתאם:

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}(Y = l \mid X = k) \cdot \mathbb{P}(X = k) = \binom{k}{l} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^l \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-l} \cdot \frac{1}{4}$$

זאת משום שמתקיים  $Y \mid X = k \sim \text{Bin}(k, \frac{1}{3})$  - יש  $k$  ביצים, שהן ניסויים (סליחה לטבעונים), והסתברות  $\frac{1}{3}$  להצלחה - אפרוח.

2.  $X, Y$  תלויים. לדוגמה,

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 2)$$

שכן שני המוכפלים בצד ימין חיוביים.