

מבוא להסתברות

© ארזים

8 במאי 2016

0.1 תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי

יהי X משתנה מקרי בעל תוחלת, ופונקציה $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. אזי

$$\mathbb{E}(g(x)) = \sum_{k \in \text{supp}(x)} g(k) \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

0.2 משתנים מקריים בלתי מתואמים

הגדרה 0.1 יהיו X, Y משתנים מקריים בעלי תוחלת. נניח שהתוחל של XY גם מוגדרת. אזי X, Y בלתי מתואמים אם

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

טענה 0.2 משתנים מקריים בלתי תלויים הם בלתי מתואמים.

תרגיל יהי מרחב הסתברות (Ω, \mathbb{P}) , כאשר $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{4}$ לכל i . נגדיר

$$X \sim \begin{cases} -2 & \omega_1 \\ -1 & \omega_2 \\ 1 & \omega_3 \\ 2 & \omega_4 \end{cases}$$

ונגדיר $Y = X^2$. האם X, Y בלתי תלויים? בלתי מתואמים?

פתרון המשתנים המקריים תלויים שכן

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 4) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 4)$$

הם כן בלתי מתואמים, שכן $\mathbb{E}X = 0$, וגם $\mathbb{E}(X^3) = \mathbb{E}(X \cdot Y) = 0$, ולכן $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

1 שונות

יהי X משתנה מקרי. השונות מוגדרת להיות

$$\text{var}(X) = \mathbb{E} \left((X - \mathbb{E}X)^2 \right) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

עבור $a, b \in \mathbb{R}$, מתקיים

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$$

1.1 שונות של סכום של משתנים מקריים

ראינו בשיעור את מושג השונות המשותפת. כעת, מתקיים

$$\text{var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(X_i, X_j)$$

1.2 מספר תכונות של שונות משותפת

$$1. \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

$$2. \text{cov}(aX + b, Y) = a \cdot \text{cov}(X, Y)$$

$$3. \text{cov}(X + Z, Y) = \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(Z, Y)$$

תרגיל במבחן בקורס יש 20 שאלות אמריקאיות, לכל שאלה 4 תשובות אפשריות ורק אחת נכונה. תשובה נכונה מזכה בשש נקודות, תשובה לא נכונה מורידה שתי נקודות. ישנן 8 שאלות קלות עליהן יודע אלון לענות נכון, את התשובות של 12 הנוספות הוא מנחש. נסמן Z - הציון של אלון. חשבו תוחלת ושונות של Z .

פתרון נגדיר X - מספר התשובות הנכונות מתוך השאלות הקשות. $X \sim \text{Bin} \left(12, \frac{1}{4} \right)$. כעת,

$$Z = 48 + 6X - 2(12 - X) = 24 + 8X$$

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(24 + 8X) = 24 + 8\mathbb{E}(X) = 24 + 8 \cdot 12 \cdot \frac{1}{4} = 48$$

$$\text{var}(Z) = \text{var}(24 + 8X) = 64 \cdot \text{var}(X) = 64 \cdot 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 144$$

$$\text{std}(Z) = \sqrt{\text{var}(Z)} = 12$$

תרגיל אלון ובן ארגנו מסיבה עם n זוגות וסידרו את $2n$ האנשים בשורה באקראי. יהי X - מספר הזוגות שבהם בני הזוג עומדים אחד לצד השני. מצאו תוחלת ושונות של X .

פתרון נפרק את X לסכום של אינדיקטורים X_i , שמקבלים 1 אם הזוג i צמודים, 0 אחרת.
 כעת

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

כעת

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{(2n-1)! \cdot 2!}{(2n)!} = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$\text{var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{cov}(X_i, X_j)$$

$$\text{var}(X_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^2}$$

$$\text{var}(X) = \frac{n-1}{n} + \sum_{i \neq j} \text{cov}(X_i, X_j)$$

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i \cdot X_j) - \mathbb{E}(X_i) \cdot \mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}(X_i \cdot X_j) - \frac{1}{n^2}$$

$$X_i \cdot X_j \sim \begin{cases} 1 & X_i = X_j = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{(2n-2)! \cdot (2!)^2}{(2n)!} = \frac{2}{n(2n-1)} = \mathbb{E}(X_i \cdot X_j)$$

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \frac{2}{n(2n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{2n - 2n + 1}{n(2n-1)} \right) = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \frac{n-1}{n} + \sum_{i \neq j} \frac{1}{n^2(2n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{n(n-1)}{n^2(2n-1)} = \frac{n-1}{n} \left(1 + \frac{1}{2n-1} \right) = \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n}{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} \end{aligned}$$

תרגיל מטילים קובייה 100 פעמים. X - כמות ההטלות בהן יצא 2 או 3. Y - כמות ההטלות בהן יצא 1 או 2. חשבו את $\text{cov}(X, Y)$.

פתרון $X, Y \sim \text{Bin}(100, \frac{1}{3})$. לכן $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = \frac{100}{3}$. את X, Y נפרק לאינדיקטורים - X_i אינדיקטור של המאורע של ההטלה i יצאה 2 או 3, Y_i אינדיקטור של המאורע בו

ההטלה i יצאה 1 או 2. לכן,

$$X = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

$$Y = \sum_{i=1}^{100} Y_i$$

נציב ונקבל

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i, \sum_{i=1}^{100} Y_i\right) = \sum_{i,j=1}^{100} \text{cov}(X_i, Y_j)$$

עבור $X_i, Y_j, i \neq j$ מתייחסים להטלות שונות, וכל ההטלות בלתי-תלויות - לכן גם $\text{cov}(X_i, Y_j) = 0$ כלומר הם בלתי מתואמים, ולכן הם בלתי תלויים, ולכן הם בלתי מתואמים, כלומר $\text{cov}(X_i, Y_j) = 0$. לכן

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \sum_{i=1}^{100} \text{cov}(X_i, Y_i) = 100 \cdot \text{cov}(X_1, Y_1) = 100 \cdot (\mathbb{E}(X_1 \cdot Y_1) - \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}Y_1) = \\ &= 100 \left(\mathbb{P}(X_1 = 1, Y_1 = 1) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = 100 \left(\mathbb{P}(\{2\}) - \frac{1}{9} \right) = 100 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9} \right) = \\ &= 100 \left(\frac{1}{18} \right) = \frac{50}{9} \end{aligned}$$

תרגיל לבן יש סכום כסף שהוא רוצה להשקיע. הוא יכול להשקיע באפיק א', שנותן רווח X , או באפיק ב', שנותן רווח Y . בנוסף, הוא יכול לפצל את ההשקעה לכדי $\alpha \in [0, 1]$ באפיק א' וכן $1 - \alpha$ באפיק ב'. במקרה זה הרווח יהיה $Z(\alpha) = \alpha X + (1 - \alpha) Y$. נתון כי $0 < \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) < \infty, 0 < \text{var}(X) < \text{var}(Y) < \infty$. כיצד צריך בן להשקיע כדי למקסם תוחלת רווח ולמזער את הסיכון (השונות)?

פתרון נשים לב כי לכל α מתקיים

$$\mathbb{E}(\alpha X + (1 - \alpha) Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + (1 - \alpha) \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$$

לכן התוחלת קבועה בלי קשר לפרמטר α . נמזער את השונות.

$$\begin{aligned} \text{var}(\alpha X + (1 - \alpha) Y) &= \text{var}(\alpha X) + \text{var}((1 - \alpha) Y) + 2\text{cov}(\alpha X, (1 - \alpha) Y) = \\ &= \alpha^2 \text{var}(X) + (1 - \alpha)^2 \text{var}(Y) + 2\alpha(1 - \alpha) \text{cov}(X, Y) = \\ &= \alpha^2 \text{var}(X \cdot Y) + 2\alpha(\text{cov}(X, Y) - \text{var}(Y)) \end{aligned}$$

החישובים נמצאים בעמוד 87 בחוברת התרגולים. זוהי פונקציה ריבועית ביחס אל α . נחפש לה נקודת מינימום. נקבל

$$\alpha_{min} = \frac{\text{var}(Y) - \text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X \cdot Y)}$$

צריך לבדוק מתי $0 \leq \alpha_{min} \leq 1$, כי אחרת צריך לבחור את אחד מבין 0, 1 כי הוא נקודת הקיצון בקטע זה.