

# רשימת משפטים ללינארית 1 עם סמיון

רשימת משפטים מותרים לשימוש בבחינה לאלגברה לינארית 1א ללומדים עם סמיון

## 1 הגדרות

1. מערכת הומוגנית: מערכת משוואות שבה וקטור המקדמים החופשיים שווה  $\vec{0}$
2. מערכות שקולות: שתי מערכות משוואות שקבוצות הפתרונות שלהן שוות
3. שינויים אלמנטריים:
  1.  $R_i \leftrightarrow R_j$
  2.  $R_i \leftarrow \lambda R_i$
  3.  $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$
4. מטריצה:  $p \times q$  זה מלבן עם  $p$  שורות ו- $q$  עמודות
5. איבר פותח בשורה במטריצה: האיבר הראשון בשורה השונה מ-0
6. מטריצה מדורגת היא מטריצה ש:
  1. כל שורות האפסים אם קיימות נמצאות מתחת לכל השורות שאינן שורות אפסים
  2. איבר פותח של כל שורה שאינה שורת אפסים נמצא מימין לכל האיברים הפותחים של השורות שמעליובמטריצה מדורגת קנונית מתקיים בנוסף:
  1. האיבר הפותח בכל שורה שאינה שורת אפסים שווה 1
  2. האיבר הפותח הוא האיבר היחיד בעמודה שלו ששונה מ-0
7. משתנה שקיים איבר פותח בעמודה שלו נקרא משתנה קשור  
משתנה שאינו קשור נקרא משתנה חופשי
8. פתרון טריוואלי: הפתרון  $\vec{0}$
9. מרחב  $R^n$ : קבוצת כל הנחיות של מספרים ממשיים
10.  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = \vec{a} \in R^n$
11.  $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in R^n = \vec{b} \in R^n + \vec{a} \in R^n$
12.  $(\lambda * a_1, \lambda * a_2, \dots, \lambda * a_n) \in R^n = \lambda * \vec{a} \in R^n$
13. וקטור האפס:  $\vec{0}$
14. וקטור נגדי:  $-\vec{a} \in R^n = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \in R^n$
15. תת קבוצה לא ריקה  $L \subset R^n$  נקראת תת מרחב לינארי של  $R^n$  אם מתקיימים
  1.  $\forall \vec{x} \in L, \forall \lambda \in R \mid \lambda \vec{x} \in L$
  2.  $\forall \vec{y}, \vec{x} \in L \mid \vec{y} + \vec{x} \in L$
16. צורה הומוגנית של מערכת משוואות:  
מערכת משוואות שזהה לקודמת חוץ מעמודת המקדמים החופשיים שמוחלפת ב- $\vec{0}$
17. מכפלה קרטזית של קבוצות:  
 $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

18. מרחב וקטורי מעל  $R$  זאת קבוצה  $V$  עם שתי פונקציות:

$$f: V \times V \rightarrow V$$

$$g: R \times V \rightarrow V$$

$$f(x,y)=x+y$$

$$g(\lambda,x)=\lambda*x$$

$$19. \forall \vec{b}, \vec{a} \in V, \forall \lambda \in R$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{c} + (\vec{b} + \vec{a}) = (\vec{c} + \vec{b}) + \vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$$

$$\vec{0} = \vec{a} + (-\vec{a})$$

$$\lambda \vec{b} + \lambda \vec{a} = \lambda(\vec{b} + \vec{a})$$

$$\mu \vec{a} + \lambda \vec{a} = (\mu + \lambda) \vec{a}$$

$$\mu(\lambda \vec{a}) = (\mu \lambda) \vec{a}$$

$$\vec{a} = 1 \vec{a}$$

20. יהי  $V$  מרחב וקטורי, תת קבוצה LCV נקראת תת מרחב לינארי (וקטורי) אם

מתקיימים:

L.1 לא קבוצה ריקה

$$2. \forall \vec{x} \in L, \forall \lambda \in R \mid \lambda \vec{x} \in L$$

$$3. \forall \vec{y}, \vec{x} \in L \mid \vec{y} + \vec{x} \in L$$

21. צירוף לינארי: סכום של וקטורים מתוך מרחב וקטורי  $V$  מוכפלים במקדמים-

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s \in V \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in R \quad \lambda_1 * \vec{v}_1 + \lambda_2 * \vec{v}_2 + \dots + \lambda_s * \vec{v}_s$$

22. יהיה  $V$  מרחב וקטורי והיו  $x_1, x_2, \dots, x_s \in V$

$$L = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_s\} := \{\lambda_1 * x_1 + \lambda_2 * x_2 + \dots + \lambda_s * x_s \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in R\}$$

הסדרה  $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  נקראת פורשת את  $L$

23. הסדרה  $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  נקראת תלויה לינארית אם קיים צירוף לינארי שמקיים

$$\vec{0} \text{ שווה ל-} \sum_{i=1}^s \lambda_i \neq 0$$

הסדרה נקראת בלתי תלויה לינארית אם לא קיים צירוף לינארי שמקיים

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i \neq 0 \text{ שווה ל-} \vec{0}$$

24. הבסיס הסטנדרטי של  $R^n$

$$i \text{-} \text{במקום ה-} \{e_1, e_2, \dots, e_n\} = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$$

25. תהי סדרת וקטורים  $\{x_1, x_2, \dots, x_s\} = V$  תת סדרה שלה תוגדר ככל קבוצת וקטורים

$$\{x_1, x_2, \dots, x_r \mid r \leq s, \forall i \leq r : x_i \in V\}$$

26. מרחב וקטורי נקרא נוצר סופית אם קיימת סדרה סופית שפורשת אותו

27. סדרה  $x_1, x_2, \dots, x_s \in V$  נקראת בסיס של  $V$  אם היא בלתי תלויה לינארית ופורשת

את  $V$

28. מימד של מרחב וקטורי  $V$  הוא כמות האיברים בסדרה בלתי תלויה לינארית הפורשת

את  $V$  ומסומן  $\dim V$

29. יהי  $V$  מרחב וקטורי ותהי  $x_1, x_2, \dots, x_s$  סדרה הפורשת אותו אזי לכל  $v \in V$  סדרת המקדמים בהצגה שלו על ידי צירוף לינארי של  $x_1, x_2, \dots, x_s$   $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$  נקראת הקואורדינטות של  $v$  ביחס לבסיס  $x_1, x_2, \dots, x_s$

30.  $M_{n \times m}(R)$  קבוצת כל המטריצות בעלות איברים ממשיים ובעלות  $n$  שורות ו  $m$  עמודות

31. תהי  $A$  מטריצה,  $A_{ij}$  מוגדר להיות האיבר במטריצה בשורה  $i$  בעמודה  $j$

32. נתונות  $A, B \in M_{n \times m}(R)$  מוגדר:  $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

33. נתונה  $A \in M_{n \times m}(R)$  ו  $\lambda \in R$  אזי  $\lambda * A$  מוגדרת:  $(\lambda A)_{ij} = \lambda * A_{ij}$

34.  $A \in M_{n \times m}(R), B \in M_{m \times p}(R)$ :  $(A * B)_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} * B_{kj}$

35. מטריצת היחידה:  $I_n \in M_{n \times n}(R)$

$$\forall 1 \leq i, j \leq n \quad i = j \rightarrow I_{ij} = 1, \quad i \neq j \rightarrow I_{ij} = 0$$

$$0 = \delta_{ab} \leftarrow a \neq b, \quad 1 = \delta_{ab} \leftarrow a = b: \delta$$

37. ניתן לכתוב מערכת משוואות כמוואה הבאה  $A_{n \times m} * x_{m,1} = b_{n \times 1}$  כאשר  $A$  מטריצה מקדמים  $x$  מטריצת עמודה של משתנים ו  $b$  מטריצה עמודה של מקדמים חופשיים

38. מטריצה מוחלפת: תהי  $A \in M_{n \times m}(R)$ , אזי המטריצה המוצמדת המסומנת  $(A^t)_{ij} = A_{ji}$  מוגדרת:  $A^t \in M_{m \times n}(R)$

39. מטריצה סימטרית: מטריצה ריבועית המקיימת  $A^t = A$

40. מטריצה אנטי סימטרית: מטריצה ריבועית המקיימת  $A^t = -A$

41.  $A \in M_{n \times n}(R)$ :

1.  $A$  נקראת הפיכה מימין אם קיימת  $B \in M_{n \times n}(R)$  כך ש  $I_n = B * A$
2.  $A$  נקראת הפיכה משמאל אם קיימת  $B \in M_{n \times n}(R)$  כך ש  $I_n = A * B$
3.  $A$  נקראת הפיכה אם קיימת  $B \in M_{n \times n}(R)$  כך ש  $I_n = A * B = B * A$

42.  $A \in M_{n \times n}(R)$  תקרא מטריצה אלכסונית אם:  $\forall 1 \leq i, j \leq n \quad i \neq j \rightarrow A_{ij} = 0$

43. מטריצה אלמנטרית: מטריצה המתקבלת מ  $I$  על ידי פעולה אלמנטרית אחת

44. תהי  $\varphi$  פעולה אלמנטרית על שורות פעולה אלמנטרית הופכית  $\varphi^{-1}$  מוגדרת כך:  $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$

45.  $A, B \in M_{n \times n}(R)$  נקראת שקולת שורות ל  $A$  אם ניתן לקבל את  $B$  מ  $A$  בעזרת מספר פעולות אלמנטריות על שורות

46. תהי  $A \in M_{n \times n}(R)$  מטריצה דרגת  $A$  היא מימד  $\text{span}$  של שורות של  $A$  ומסומנת:  $\text{rk}A$

47. הדטרמיננטה היא פונקציה ממרחב המטריצות הריבועיות ל  $R$  שמקיימת:

$$\det[R_1, \dots, \beta R_i, \dots, R_n] + \det[R_1, \dots, \alpha R_i, \dots, R_n] = \det[R_1, \dots, \alpha R_i + \beta R_i, \dots, R_n].1$$

2. אם למטריצה  $A$  שני שורות שוות אז  $0 = \det A$

$$1 = \det I_n.3$$

48. מינור: עבור מטריצה  $A \in M_{n \times n}(R)$  נסמן ב  $M_{ij}(A)$   $(1 \leq i, j \leq n)$  מטריצה מגודל  $(n-1) \times (n-1)$  המתקבלת מ  $A$  על ידי מחיקת השורה ה  $i$  והעמודה ה  $j$  ב  $A$

49. מטריצה משולשית עליונה: מטריצה שבה  $\forall i > j. A_{ij} = 0$

50. מטריצה משולשית תחתונה: מטריצה שבה  $\forall i < j. A_{ij} = 0$

51. ון דר מונד: מטריצה  $A \in M_{n \times n}(R)$  שמקיימת  $\exists x \forall 1 \leq i, j \leq n. A_{ij} = (x_i)^{j-1}$

52. מטריצה המתקבלת מ  $A$  על ידי החלפת העמודה ה  $i$  בעמודת המקדמים החופשיים  $A_i$ :

53. מטריצה מוצמדת מסומנת  $adj A$  ומוגדרת:  $(adj A)_{ij} = (-1)^{i+j} det M_{ji} A \in M_{n \times n}(R)$

54.  $\sigma(j_1, \dots, j_n)$  היא תמורה של מספרים מ  $1$  עד  $n$

55. תהי  $\sigma$  תמורה,  $n, 1 \leq p < q \leq n$  אזי  $j_p, j_q$  מהווים סדר אם  $j_p < j_q$  ומהווים היפוך אם  $j_p > j_q$

56. תהי  $\sigma$  תמורה, הזוגיות של  $\sigma$  מסומנת כ  $sgn \sigma$  מוגדרת כ:  $det[e_{j_1}, \dots, e_{j_n}] = (-1)^\xi$   $\xi$  = מספר ההיפוכים ב  $\sigma$

57. מטריצה  $A \in M_{2n \times 2n}(R)$  תקרא מטריצת בלוקים אם היא מורכבת מבלוקים (תתי מטריצות) לדוגמא:

$$= A \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

58. שדה: קבוצה  $F$  עם שתי פונקציות

חיבור:  $\varphi : F \times F \rightarrow F$

כפל:  $\psi : F \times F \rightarrow F$

סימון:  $\varphi(x, y) = x + y$   $\psi(x, y) = x * y$

שמקיימות  $(\forall a, b, c \in F)$ :

$$a + b = b + a.1$$

$$(a + b) + c = a + (b + c).2$$

$$\exists 0 \in F. a + 0 = a.3$$

$$\exists -a \in F. a + (-a) = 0.4$$

$$a * b = b * a.5$$

$$(a * b) * c = a * (b * c).6$$

$$\exists 1 \in F. 1 * a = a.7$$

$$(a + b) * c = a * c + b * c.8$$

$$\forall a \neq 0 \exists a^{-1} \in F. a * a^{-1} = 1.9$$

$$1 \neq 0.10$$

59.  $x$  שקול מודולו  $n$  ל  $y$  אם  $(x - y)$  מתחלק ב  $n$  סימון:  $(x - y)$

60.  $Z_n$  שדה מחלקות השקילות של מודולו  $n$  כשהכפל והחיבור מוגדרים כרגיל רק שלוקחים מודולו  $n$  בסוף הפעולה

61. יהי  $F$  שדה כמות האיברים ב  $F$  מסומנת:  $|F|$

62. יהי  $F$  שדה המציינ של  $F$  המסומן  $char F$  הוא המספר המינימלי  $n$  המקיים  $1 + 1 + \dots + 1 = 0$  פעמים  $n$  אם אין  $n$  כזה אז מסומן  $char F = 0$
63. מרחב וקטורי מעל שדה  $F$  הוא בדיוק כמו מרחב וקטורי מעל  $R$  כאשר הסקלרים נלקחים מהשדה  $F$
64. תלות לינארית מעל  $F$  זהה לתלות לינארית מעל  $R$  כאשר הלמבדות נלקחים מהשדה  $F$
65.  $span$  של סדרת וקטורים  $K$  מעל  $F$  מוגדר באופן שקול כחיתוך כל תתי המרחב הלינאריים המכילים את  $K$
66. יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $F$  ו  $M_1, \dots, M_s \subset V$  תתי מרחב סכומם מוגדר:  

$$M_1 + M_2 + \dots + M_s = span(M_1 \cup \dots \cup M_s)$$
67. יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $F$  ו  $M_1, \dots, M_s \subset V$  אזי סכומם יקרא ישר ויסומן  $M_1 \oplus \dots \oplus M_s$  אם ורק אם  $M_i \cap \sum_{j=1, j \neq i}^s M_j = \{0\}$
68. יהי  $V$  מרחב וקטורי נוצר סופית מעל  $F$  יהי  $e_1, \dots, e_s$  בסיס של  $V$  לכל  $v \in V$  קיימת הצגה יחידה:  $v = v_1 e_1 + \dots + v_s e_s$   
הסדרה  $v_1, \dots, v_s$  נקראת סדרת הקואורדינטות של  $v$  ביחס לבסיס  $e_1, \dots, e_s$
69. מטריצת מעבר: יהיו שני בסיסים של  $V$   $e_1, \dots, e_s$  ו  $e'_1, \dots, e'_s$  אזי לכל וקטור בבסיס  $e$  הצגה יחידה  $e'_i = c_{1i} e_1 + \dots + c_{si} e_s$  אזי המטריצה  $C$  המוגדרת  $C_{ij} = c_{ij}$  (העמודה  $i$  היא הקואורדינטות של  $e'_i$  לפי הבסיס  $e$ )
70. מטריצת וקטורים היא מטריצה שבה כל כניסה היא וקטור ומכפלתה מוגדרת רק כמכפלה במטריצת סקלרים ומתקיימים כל החוקים להכפלה רגילה
71. לפי ההגדרה הקודמת ניתן להעתיק את ההגדרה לפניה כך  $[e'_1, \dots, e'_s] = [e_1, \dots, e_s] C$
72. טרנספורמציה לינארית: יהיו  $U, V$  מרחבים וקטוריים מעל  $F$  טרנספורמציה לינארית היא פונקציה:  $\varphi: V \rightarrow U$  שמקיימת:  
1.  $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$   
2.  $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$
73. תהי  $\varphi$  טרנספורמציה לינארית מ  $V$  ל  $U$  אזי  $\varphi$  תיקרא:  
מונומורפיזם אם  $\varphi$  חד חד ערכית  
אפימורפיזם אם  $\varphi$  היא על  $U$   
איזומורפיזם אם  $\varphi$  היא גם חד חד ערכית וגם על  $U$
74.  $\varphi: X \rightarrow Y$  טרנספורמציה לינארית  $Im \varphi = \{y \in Y | \exists x \in X, \varphi(x) = y\}$
75.  $\varphi: X \rightarrow Y$  טרנספורמציה לינארית  $Ker(\varphi) = \{x \in X | \varphi(x) = 0_Y\}$
76. יהיו  $V, W$  מרחבים וקטורים, אזי הם יקראו איזומורפיים אם קיים איזומורפיזם ביניהם (יחס זה הוא יחס שקילות)
77. תהי  $\varphi: V \rightarrow W, dim V = n, dim W = m$  טרנספורמציה לינארית ויהיו  $[f], [e]$  בסיסים ב  $W$  ו  $V$  בהתאמה אזי המטריצה של  $\varphi$  לפי בסיסים אלו היא מטריצה  $A_{m \times n}$  שהעמודה  $i$  שלה זאת עמודת הקואורדינטות של  $\varphi(e_i)$  לפי  $[f]$

78.  $L(V, W) = \{ \varphi : V \rightarrow W \mid \varphi \text{ לינארית} \}$  טרנספורמציה לינארית

79. מרחב דואלי  $V^* = L(V, F)$  איבר במרחב דואלי יקרא פונקציונל לינארי

## 2 משפטים ומסקנות

1. תהי A מטריצה, ניתן להביא אותה לצורה מדורגת קנונית תוך שימוש בפעולות אלמנטריות
2. לכל מערכת משוואות לינארית אחד מהבאים:
  - 0.1 פתרונות
  2. פתרון יחיד
  3. אינסוף פתרונות
3. אם למערכת יותר משתנים ממשוואות אזי לא יכול להיות לה פתרון יחיד
4. בכל מערכת משוואות הומוגנית יש או פתרון יחיד=הפתרון הטריוואלי או אינסוף פתרונות וביניהם הפתרון הטריוואלי

$$5. \forall \vec{b}, \vec{a} \in R^n, \forall \lambda \in R$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{c} + (\vec{b} + \vec{a}) = (\vec{c} + \vec{b}) + \vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$$

$$\vec{0} = \vec{a} + -\vec{a}$$

$$\lambda \vec{b} + \lambda \vec{a} = \lambda(\vec{b} + \vec{a})$$

$$\mu \vec{a} + \lambda \vec{a} = (\mu + \lambda) \vec{a}$$

$$\mu(\lambda \vec{a}) = (\mu \lambda) \vec{a}$$

$$\vec{a} = 1 \vec{a}$$

6. במערכת הומוגנית סכום של 2 פתרונות וכפל פתרון כלשהו בסקלר הם גם פתרונות (קבוצת הפתרונות של מערכת הומוגנית היא תת מרחב לינארי של  $R^n$ )
7. קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות כללית היא:
 
$$\{\vec{c}_0 + \vec{v} \mid \vec{c}_0 \in R^n, \text{ פתרון של המערכת } \vec{c}_0 + \vec{v} \in R^n\}$$
8.  $R^{[a,b]}$  עם הפעולות של חיבור וכפל בסקלרים (הסטנדרטיות) זה מרחב וקטורי
9. עכשיו יבואו הרבה משפטים למרחבים וקטוריים:
  1.  $b + c = a + b \rightarrow b = c$
  2. האיבר הנייטרלי ביחס לחיבור הוא יחיד
  3. לכל  $v \in V$  הנגדי שלו הוא יחיד
  4.  $\lambda \in R \quad \lambda * \vec{0} = \vec{0}$
  5.  $v \in V \quad 0 * \vec{v} = \vec{v}$
  6.  $\lambda = 0 \vee \vec{v} = \vec{0} \leftrightarrow \lambda * \vec{v} = \vec{0}$
  7.  $v \in V \quad -1 * \vec{v} = -\vec{v}$
10. יהי  $V$  מרחב וקטורי LCV אזי:
  1.  $\vec{0} \in L$
  2.  $\forall \vec{v} \in L \mid -\vec{v} \in L$
  3. כל צירוף לינארי של וקטורים מ  $L$  שייך ל  $L$



11. יהי  $V$  מרחב וקטורי תהי  $S = \{L_\alpha | \alpha \in A\}$  משפחה של תתי מרחב לינאריים אזי  $\bigcap S \subset V$  תת מרחב לינארי
12.  $\text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  תמיד תת מרחב לינארי (הוא גם נקרא תת מקחב שנפרס על ידי  $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ )
13. כל סדרת וקטורים המכילה את  $\vec{0}$  היא תלויה לינארית
14. כל סדרת וקטורים המכילה את אותו וקטור פעמיים היא תלויה לינארית
15. אם סדרה  $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  בלתי תלויה לינארית אזי כל תת סדרה שלה בלתי תלויה לינארית, ההיפך לא בהכרח נכון
16. סדרה בת וקטור אחד תלויה לינארית אם ורק אם הוקטור שווה ל $\vec{0}$
17. סדרה בת שתי וקטורים תלויה לינארית אם ורק שני הוקטורים פרופורציוניים
18. נניח  $V$  מרחב וקטורי שנפרש על ידי סדרת וקטורים בגודל  $n$  אזי כל סדרה בלתי תלויה לינארית ב- $V$  היא בת לכל היותר  $n$  וקטורים
19. 1. בכל מרחב וקטורי  $V$  נוצר סופית קיים בסיס וכל בסדרה בלתי תלויה לינארית ניתן להשלים עד לבסיס  
2. בכל מרחב וקטורי  $V$  לכל הבסיסים אותו מספר איברים  
3. בכל מרחב וקטורי  $V$  כל סדרה (סופית) ניתן לצמצם עד לבסיס
20. נניח  $\vec{y} \in \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  אזי  $\text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_s, y\} = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$
21. יהי  $V$  מרחב וקטורי נוצר סופית  $\dim V = n$
1. כל סדרה בת  $n$  איברים שהיא בלתי תלויה לינארית היא גם בסיס של  $V$   
2. כל סדרה בת  $n$  איברים שהיא פורשת את  $V$  היא גם בסיס של  $V$
22. יהי  $V$  מרחב וקטורי נוצר סופית, אזי כל תת מרחב לינארי  $W \subset V$  גם נוצר סופית
23. יהי  $V$  מרחב וקטורי ותהי  $x_1, x_2, \dots, x_s$  סדרה הפורשת אותו, אזי לכל  $v \in V$  קיימת הצגה על ידי צירוף לינארי של  $x_1, x_2, \dots, x_s$  והיא יחידה
24.  $M_{n \times m}(R)$  ביחד עם פעולות החיבור וכפל הסטנדרטיות של מטריצות הוא מרחב וקטורי
25.  $\dim M_{n \times m}(R) = m \cdot n$
26. כפל מטריצות הוא לא קומוטטיבי
27. כפל מטריצות הוא דיסטריבוטיבי מימין ומשמאל ואסוציאטיבי
28. תהי  $A \in M_{n \times m}(R)$
1.  $I_n * A = A$   
2.  $A * I_m = A$
29.  $\delta_{ij} = (I_n)_{ij}$

30.  $(A^t)^t = A$  1.  
 2.  $(\lambda A)^t = \lambda A^t$   
 3.  $(A + B)^t = A^t + B^t$   
 4.  $(A * B)^t = B^t * A^t$
31.  $A \in M_{n \times n}(R)$  אם הפיכה מימין או הפיכה משמאל אז  $A$  הפיכה
32.  $A \in M_{n \times n}(R)$  אם  $A$  הפיכה אז ההופכית שלה היא יחידה ומסומנת:  $A^{-1}$
33.  $A \in M_{n \times n}(R)$  אם  $A$  לא עמודת אפסים או שורת אפסים אזי  $A$  לא הפיכה
34. נתונה מערכת משוואות לינארית  $A * x = b$   $A \in M_{n \times n}(R)$  אם הפיכה קיים למערכת פתרון יחיד והוא  $A^{-1} * b$
35.  $A \in M_{n \times n}(R)$  תהי  $A$  הפיכה אזי:  
 1.  $(A^{-1})^{-1} = A$  הפיכה ו  
 2.  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$  הפיכה ו
3.  $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$  הפיכה ו  $A * B \in M_{n \times n}(R)$
36.  $A \in M_{n \times n}(R)$  אלכסונית אזי  $A$  הפיכה אם ורק אם  $A_{ij} \neq 0 \rightarrow i = j$   $\forall 1 \leq i, j \leq n$
37. תהי  $\varphi$  פעולה אלמנטרית על השורות אזי  $\varphi(A) = A * \varphi(I)$
38. תהי  $\psi$  פעולה אלמנטרית על העמודות אזי  $\psi(A) = A * \psi(I)$
39. יהיו  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  פעולות אלמנטריות אזי:  
 $\varphi_1(\varphi_2(\dots \varphi_k(A))) = \varphi_1(I) * \varphi_2(I) \dots * \varphi_k(I) * A$
40.  $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = \varphi(\varphi^{-1}(A)) = A$
41. כל מטריצה אלמנטרית היא הפיכה וההופכית שלה היא גם מטריצה אלמנטרית
42.  $A, B \in M_{n \times n}(R)$  נניח  $A$  הפיכה אזי  $B$  הפיכה אם ורק אם  $A * B$  הפיכה
43. כל מטריצה  $A$  ניתן להציג  $A = \varphi_1(I) * \varphi_2(I) \dots \varphi_k(I) * B$  כשב מטריצה מדורגת קנונית
44.  $A, B \in M_{n \times n}(R)$  אם  $A * B = I_n$  אזי  $B * A = I_n$
45.  $A \in M_{n \times n}(R)$  הפיכה אם ורק אם צורתה המדורגת קנונית היא  $I_n$  והשיטה למציאת הפיכה היא להוסיף את  $I_n$  מימין ל  $A$  ולדרג את שניהם ביחד, אם מדרגים את  $A$  ומגיעים ל  $I_n$  אז המטריצה שנוצרה מ  $I_n$  היא ההופכית של  $A$  אחרת  $A$  לא הפיכה
46. 1. שקילות שורות הוא יחס שקילות
47.  $A \in M_{n \times n}(R)$  הטענות הבאות שקולות:  
 1. הפיכה  
 2. קיים  $b \in R^n$  למערכת הלינארית  $A * x = b$  פתרון יחיד  
 3.  $A$  שקולת שורות ל  $I_n$   
 4. השורות של  $A$  בלתי תלויות לינארית  
 5. העמודות של  $A$  בלתי תלויות לינארית
48.  $A \in M_{n \times n}(R)$  אם  $0 = \text{rk} A$  אם ורק אם  $0 = \text{rk} A$

- .49  $n = \text{rk} I_n$
- .50  $\text{rk} A \leq \min\{n, m\} \quad A \in M_{m \times n}(R)$
- .51  $n = \text{rk} A \quad A \in M_{m \times n}(R)$  אם ורק אם A הפיכה
- .52  $\text{rk} A^t = \text{rk} A$
- .53 לכל המטריצות השקולות שורה אותה דרגה
- .54 דרגת מטריצה מדורגת (לאו דווקא קנונית) שווה למספר השורות
- .55 דרגת מטריצה לא משתנה עם פעולות אלמנטריות על שורות או עמודות
- .56  $\min\{A, B\} \geq \text{rk}(A * B)$
- .57  $\lambda^n * \det A = \det(\lambda A) \quad A \in M_{m \times n}(R)$
- .58 לכל מטריצה הדטרמיננטה היא יחידה
- .59 השינויים בדטרמיננטה בעקבות הפעלת פעולות אלמנטריות:
- .1  $-\det A = \det \varphi(A) \quad \varphi : R_i \leftrightarrow R_j$
- .2  $\lambda * \det A = \det \varphi(A) \quad \varphi : R_i \leftarrow \lambda R_i$
- .3  $\det A = \det \varphi(A) \quad \varphi : R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$
- .60  $\det A = A_{11} * A_{22} - A_{21} * A_{12} \quad A \in M_{2 \times 2}(R)$
- .61  $\det(A * B) = \det A * \det B \quad A, B \in M_{n \times n}(R)$
- .62 פיתוח לפי שורה:  $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} A_{ij} * \det M_{ij}(A) \quad 1 \leq i \leq n$
- .63 פיתוח לפי עמודה:  $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} * \det M_{ij}(A) \quad 1 \leq j \leq n$
- .64  $\det A = 0$  אם ורק אם A לא הפיכה
- .65  $\det A^t = \det A$
- .66  $A \in M_{3 \times 3}(R)$   
 $\det A = (A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32}) - (A_{13}A_{22}A_{31} + A_{11}A_{23}A_{32} + A_{12}A_{21}A_{33})$
- .67  $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \forall 1 \leq i \leq n. A_{ii} = \lambda_i$  משולשית כך ש  $A \in M_{n \times n}(R)$
- .68  $\det A = \prod_{j=1}^n \prod_{i=j+1}^n (x_i - x_j)$  מספר הגורמים מונד  $A \in M_{n \times n}(R)$  שווה  $\binom{n}{2}$
- .69 נתונה מערכת משוואות  $Ax = b$  נניח A הפיכה אז קיים פתרון יחיד  $x = [c_1, c_2, \dots, c_n]$   
כש  $c_i = \frac{\det A_i}{\det A}$
- .70  $\text{adj} A * A = A * \text{adj} A = \det A * I_n$
- .71  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} * \text{adj} A$  נניח A הפיכה אזי  $A \in M_{n \times n}(R)$
- .72  $\det A = \sum_{\sigma} \text{sgn} \sigma * a_{1\sigma(1)} * \dots * a_{n\sigma(n)}$

$$A \in M_{2n \times 2n}(R) \quad .73$$

$$=A$$

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det B * \det C \text{ אזי}$$

.74 יהי  $F$  שדה  $(\forall a \in F)$ :

1. האיבר נייטרלי ביחס לחיבור הוא יחיד

2. האיבר נייטרלי ביחס לכפל הוא יחיד

3. לכל  $a$  האיבר הנגדי של  $a$  הוא יחיד

4. לכל  $a$  האיבר ההופכי של  $a$  הוא יחיד

$$a + b = a + c \rightarrow b = c.5$$

$$a * 0 = 0.6$$

$$(-1) * a = -a.7$$

$$a * b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0.8$$

$$a \neq 0 \wedge a * b = a * c \rightarrow b = c.9$$

.75 שקילות מודולו  $n$  היא יחס שקילות וכל הנובע מכך (המחלקות זרות וכו..)

$$n = |Z_n| \quad .76$$

.77  $Z_n$  מקיים את כל אקסיומות השדה אם ורק אם  $n$  ראשוני

.78 יהי  $F$  שדה אזי  $\text{char} F$  הוא 0 או מספר ראשוני

.79 יהי  $F$  שדה אם  $F$  מספר סופי של איברים אזי  $\text{char} F \neq 0$

.80 יהי  $F$  שדה ו  $\text{char} F = p$  אזי  $|F| = p^r$

.81 יהי  $p$  ראשוני אזי לכל  $r \in N$  קיים שדה בין  $p^r$  איברים

.82 תהי  $K$  סדרת וקטורים מעל  $F$

$$K \subset \text{span} K.1$$

$$K_1 \subset K_2 \rightarrow \text{span} K_1 \subset \text{span} K_2.2$$

3. אם  $L$  תת מרחב לינארי אזי  $\text{span} L = L$

4. אם  $L$  תת מרחב לינארי ו  $L \subset K$  אזי  $\text{span} K \subset L$

$$M_1 + \dots + M_s = \{x_1 + \dots + x_s | x_1 \in M_1, \dots, x_s \in M_s\} \quad .83$$

.84 יהי  $V$  מרחב וקטורי ויהיו  $M_1, M_2 \subset V$  תתי מרחבים נוצרים סופית אזי  $M_1 \cap M_2, M_1 + M_2$

גם נוצרים סופית ו:

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2)$$

.85 יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $F$  ו  $M_1, \dots, M_s \subset V$  כך ש  $\sum_{i=1}^s M_i = V$  אזי הדברים

הבאים שקולים:

$$M_1 \oplus \dots \oplus M_s \text{ סכום ישר}$$

2. לכל  $v \in V$  קיימת הצגה יחידה  $v = m_1 + \dots + m_s$  כך שלכל  $i$   $m_i \in M_i$

3. קיים וקטור  $v \in V$  שהצגתו בשיטה מ2 יחידה

4. אם  $0 = m_1 + \dots + m_s$  אז לכל  $i$   $m_i = 0$

5. הבסיס של  $V$  הוא איחוד הבסיסים של ה  $M_i$

$$\dim V = \dim M_1 + \dots + \dim M_s.6$$

86. לכל קבוצת תתי מרחבים מימד סכומם קטן או שווה לסכום מימדיהם
87. אם  $v_1, \dots, v_s$  סדרה בלתי תלויה לינארית ו  $[v]$  מטריצת וקטורים שאיבריה הם וקטורי הסדרה,  $A_1$  מטריצת סקלרים אזי:  

$$[v]A = [0, \dots, 0] \rightarrow A = 0$$
88. אם  $e$  ו  $e'$  שני בסיסים של מרחב וקטורי כלשהו ו  $[e'] = [e]T$  אזי  $T$  היא מטריצת המעבר מ  $e$  ל  $e'$
89. אם  $e, e', e''$  בסיסים  $C$  מטריצת מעבר מ  $e$  ל  $e'$  ו  $D$  מטריצת מעבר מ  $e'$  ל  $e''$  אזי  $CD$  מעבר מ  $e$  ל  $e''$
90. תהי  $C$  מטריצת מעבר מ  $e$  ל  $e'$  אזי  $C$  הפיכה ו  $C^{-1}$  מעבר מ  $e'$  ל  $e$
91. יהי  $x$  וקטור במרחב וקטורי  $V$  ושני בסיסים  $e$  ו  $e'$  כך ש  $C$  מטריצת מעבר מ  $e$  ל  $e'$   
 $x = x_1 e_1 + \dots + x_s e_s, x = x'_1 e'_1 + \dots + x'_s e'_s$  אזי  $[x_1, \dots, x_s]^t = C[x'_1, \dots, x'_s]^t$
92. תהי  $\varphi$  טרנספורמציה לינארית אזי:  
 1.  $\varphi(0_V) = 0_U$   
 2.  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$   
 3.  $\varphi(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s) = \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_s \varphi(x_s)$
93. הרכבה של שתי טרנספורמציות לינאריות היא טרנספורמציה לינארית ואם שתיהן מאותו סוג (אפימורפיזם, מונומורפיזם, איזומורפיזם) אזי הרכבתן היא מאותו סוג
94. אם סדרה היא בלתי תלויה לינארית אזי סדרת התמונות של איבריה היא לאו דווקא בלתי תלויה לינארית
95. אם סדרה היא תלויה לינארית אזי סדרת התמונות של איבריה היא תלויה לינארית
96.  $\varphi: X \rightarrow Y$  טרנספורמציה לינארית אם  $\varphi$  איזומורפיזם אזי היא הפיכה ו  $\varphi^{-1}$  היא גם טרנספורמציה לינארית והיא גם איזומורפיזם
97.  $\varphi: X \rightarrow Y$  טרנספורמציה לינארית  $Im\varphi$  הוא תת מרחב לינארי ו  $Ker\varphi$  הוא תת מרחב לינארי
98.  $\varphi: X \rightarrow Y$  טרנספורמציה לינארית אזי  $\varphi$  מונומורפיזם אם ורק אם  $Ker\varphi = \{0_X\}$
99. נוסחת המימד: תהי  $\varphi: V \rightarrow W$  טרנספורמציה לינארית, אזי:  

$$dim Im\varphi + dim Ker\varphi = dim V$$
100. נוסחת המימד: תהי  $\varphi: V \rightarrow W$  טרנספורמציה לינארית, ומתקיים  $dim V = dim W$  אזי שלושת הדברים הבאים שקולים:  
 1.  $\varphi$  אפימורפיזם  
 2.  $\varphi$  מונומורפיזם  
 3.  $\varphi$  איזומורפיזם
101. יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים אזי  $V$  איזומורפי ל  $W$  אם ורק אם  $dim V = dim W$  מסקנה מהמשפט: כל מרחב וקטורי מימד  $n$  איזומורפי ל  $F^n$

102. תהי  $\varphi : V \rightarrow W$  טרנספורמציה לינארית, יהיו  $[f], [e]$  בסיסים ותהי  $A$  מטריצה של  $\varphi$  לפי בסיסים אלו אזי :

$$\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \varphi(x) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m. [y_1, \dots, y_n]^t = A[x_1, \dots, x_n]^t$$

103. תהי  $\varphi : V \rightarrow W$  טרנספורמציה לינארית ויהיו  $[e], [e']$  בסיסים של  $V$  כש  $C$  מטריצה מעבר מ  $[e]$  ל  $[e']$  ויהיו  $[f], [f']$  בסיסים של  $W$  כש  $B$  מטריצה מעבר מ  $[f]$  ל  $[f']$  ו  $A$  מטריצה של  $\varphi$  ביחס ל  $[e], [f]$  ו  $A'$  מטריצה של  $\varphi$  לפי  $[e'], [f']$  אז מתקיים:  

$$A^{-1} = B^{-1} A C$$

104. הפונקציה ממרחב הטרנספורמציות הלינאריות בין  $V$  ל  $W$  למרחב המטריצות בגודל  $m \times n$  היא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים

105.  $L(V, W)$  מרחב וקטורי עם הפעולות  $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$   
 $(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$

106. יהיו  $\varphi_1, \varphi_2 : V \rightarrow W$  טרנספורמציות לינאריות ויהיו  $A_\varphi, A_\psi$  המטריצות שלהן לפי אותם בסיסים אזי  $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi, A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$

$$dim L(V, W) = dim V * dim W \quad 107$$

108. יהיו  $\varphi : V \rightarrow W, \psi : W \rightarrow U$  בסיסים  $[b], [f], [e]$  ב  $U, W, V$  בהתאמה ונסמן  $A_\varphi$  את המטריצה של  $\varphi$  לפי בסיסים אלו ו  $A_\psi$  את המטריצה של  $\psi$  לפי בסיסים אלו אזי מטריצת ההרכבת  $A_{\psi \circ \varphi}$  מקיימת  $A_{\psi \circ \varphi} = A_\psi * A_\varphi$

109. תהי  $\varphi : V \rightarrow W$  טרנספורמציה לינארית ותהי  $A$  מטריצה של  $\varphi$  לפי בסיסים כלשהם אזי מתקיים  $rk A = dim Im \varphi$

$$dim V^* = dim V \quad 110$$

111. כל פונקציונל לינארי  $f$  על  $F^n$  הוא מהצורה  $f((x_1, \dots, x_n)) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  וכל וקטור  $a$  כזה מוגדר באופן יחיד על ידי הפונקציונל  $\text{metri}$  יהי  $[e]$  בסיס של  $V$  נגדיר  $[\varepsilon]$  מתוך  $V^*$  כך ש  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$  אזי  $[\varepsilon]$  בסיס של  $V^*$  ומתקיים  $\forall \varphi \in V^*. \varphi = \varphi(e_1)\varepsilon_1 + \dots + \varphi(e_n)\varepsilon_n$